Lineare Algebra und Geometrie (LK Abi16)

B. Waldmüller

3. April 2016

Inhaltsverzeichnis

1 Lineare Gleichungssysteme

1.1 Einstiegsbeispiel

Eine Grundaufgabe der Linearen Algebra ist die Untersuchung Linearer Gleichungssysteme und ihrer Lösungsmengen. Lineare Gleichungssysteme kannst du schon? Mag sein. Gelöst hast du bestimmt schon welche, zahllose inner– und außermathematische Anwendungen führen letztlich auf ein Lineares Gleichungssystem[1]. Ich gebe zunächst verbindlich vor, wie du so ein System aufschreibst und wie du es löst; Kraut– und Rübenmethoden sind verboten.

Nehmen wir als Beispiel dieses LGS:

$$\begin{array}{rcl} x_1 - 2x_2 + x_3 &=& 8 \\ 3x_1 + 5x_2 + 2x_3 &=& -1 \\ -2x_1 + x_2 - 5x_3 &=& -19 \end{array}$$

Die Variablen stehen sauber unter einander. Eigentlich kommt es dann nur auf die Vorfaktoren an; die Stellen, an denen sie stehen, veraten, zu welchen Variablen sie gehören. Zieht man diesen Gedanken konsequent durch, schreibt man das System so:

$$\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 8 \\ 3 & 5 & 2 & -1 \\ -2 & 1 & -5 & -19 \end{array} \tag{1}$$

Dieses System bringst du mit dem **Gaußschen Algorithmus** auf Treppenform. Dabei addierst du zur zweiten und zur dritten Gleichung geeignete Vielfache der ersten Gleichung, so dass in der ersten Spalte in den Zeilen zwei und drei jeweils eine Null steht. Danach fährst du entsprechend mit der zweiten Spalte fort. Auf diese Weise ist sichergestellt, dass das neue System (das jeweils komplett hingeschrieben wird!) die gleichen Lösungen wie das alte hat. Die Umformungen notierst du stets hinter der Gleichung. Erster Arbeitsgang:

$$\begin{array}{ccc|cccc} 1 & -2 & 1 & 8 & I' & = & I \\ 0 & 11 & -1 & -25 & II' & = & II - 3 * I \\ 0 & -3 & -3 & -3 & III' & = & III + 2 * I \end{array}$$

Und der zweite (erste Gleichung nicht mehr anfassen!):

$$\begin{array}{ccc|cccc} 1 & -2 & 1 & 8 & I'' & = & I' \\ 0 & 11 & -1 & -25 & II'' & = & II' \\ 0 & 0 & -\frac{36}{11} & -\frac{108}{11} & III'' & = & III' + \frac{3}{11} * II' \end{array}$$

Nun kommt die Ernte: Die letzte Gleichung des letzten Systems lautet ausgeschrieben $-\frac{36}{11}x_3 = -\frac{108}{11}$, und daraus ergibt sich $x_3 = 3$. Die zweite Gleichung heißt dann $11x_2 - 3 = -25$, also ist $x_2 = -2$. Die erste Gleichung (des letzten Systems) legt nun x_1 fest: $x_1 - 2 \cdot (-2) + 3 = 8$, also $x_1 = 1$. Fertig! Du siehst, welchen Sinn es hat, das System in Treppenform zu bringen: man kann die Variablen von unten der Reihe nach ausrechnen.

[1] ein LGS, wie wir von nun an kurz sagen wollen

1.2 Der Spaltenraum $\mathbb{R}^n$

Als wir unser LGS in Gleichung (1) auf der Seite 4 lösten, fanden wir $x_1 = 1$, $x_2 = -2$ und $x_3 = 3$. Wieviele Lösungen hat das System denn nun? Die Antwort ist: Genau eine. Um diesem Umstand Rechnung zu tragen, erschafft man neue Objekte, nämlich Spaltenvektoren. Einzige Lösung des Systems in Gleichung (1) ist der **Spaltenvektor**

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} \quad ,$$

das System hat dann die Lösungsmenge

$$\mathbb{L} \ = \ \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} \right\} \quad .$$

1 Definition
Für jede natürliche Zahl $n \geq 1$ ist der Spaltenraum $\mathbb{R}^n$ die Menge

$$\mathbb{R}^n \ := \ \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \middle| \, x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathbb{R} \right\} \quad .$$

Die Elemente des $\mathbb{R}^n$ nennen wir Spaltenvektoren, wir bezeichnen sie mit $\vec{x}, \vec{a}, \vec{b}$ und so weiter. Und wenn nichts anderes gesagt ist, bezeichnen wir die Einträge des Vektors $\vec{a}$ mit $a_1, a_2, \ldots, a_n$.

Was du hier siehst, ist ziemlich typisch für (moderne) Algebra. Man erschafft neue Objekte, zum Teil von schwindelerregender Komplexität, und „rechnet“ damit. Für die Spaltenvektoren hat man eine Addition, das heißt, man kann für beliebige $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^n$ stets die Summe $\vec{x} + \vec{y}$ bilden, und für jede Zahl $r \in \mathbb{R}$ und $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ das Vielfache $r\vec{x}$. Diese Rechenarten sind so definiert:

2 Definition
Für $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^n$ und $r \in \mathbb{R}$ definiert man Summen und Vielfache durch

$$\vec{x} + \vec{y} \ = \ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \ := \ \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ x_2 + y_2 \\ \vdots \\ x_n + y_n \end{pmatrix} \quad \textit{und}$$

$$r\vec{x} \ = \ r \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \ := \ \begin{pmatrix} rx_1 \\ rx_2 \\ \vdots \\ rx_n \end{pmatrix} \quad .$$

Es ist kein Zufall, dass man für die neuen Rechenarten die Bezeichnungen $+$ und $\cdot$ verwendet; sie verhalten sich sehr weitgehend wie Summen und Produkte. Für die Addition gelten das Kommutativgesetz und Assoziativgesetz, das heißt, für alle $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z} \in \mathbb{R}^n$ ist

$$\vec{x} + \vec{y} \ = \ \vec{y} + \vec{x} \qquad \text{und} \qquad (\vec{x} + \vec{y}) + \vec{z} \ = \ \vec{x} + (\vec{y} + \vec{z}) \quad .$$

Und für die Multiplikation eines Vektors mit einer Zahl gilt

$$(r+s)\vec{x} \ = \ r\vec{x} + s\vec{x} \quad \text{sowie} \quad r(\vec{x} + \vec{y}) \ = \ r\vec{x} + r\vec{y} \quad \text{und} \quad r(s\vec{x}) \ = \ (rs)\vec{x}$$

für alle $r, s \in \mathbb{R}$ und alle $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^n$.

Die Gültigkeit dieser Regeln ergibt sich aus den vertrauten Regeln für das Rechnen mit reellen Zahlen. Beispielsweise ist für $n = 2$

$$\vec{x} + \vec{y} \ = \ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \ = \ \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ x_2 + y_2 \end{pmatrix} \ = \ \begin{pmatrix} y_1 + x_1 \\ y_2 + x_2 \end{pmatrix} \ = \ \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \ = \ \vec{y} + \vec{x} \ .$$

Dies sind die Regeln, die du für praktische Rechnungen brauchst. Will man einen abstrakten Vektorraum definieren, braucht man noch ein paar mehr. Wegen Timons ratlosem Gesicht lasse ich die erstmal weg; wenn man nur im $\mathbb{R}^n$ rechnen will, braucht man sie in der Tat nicht.

Nur keine Panik, Jungs. Die Lineare Algebra ist zwar eine abstrakte Theorie, aber die neuen Objekte und Rechenarten haben anschauliche geometrische Deutungen. Und mit den neuen Begriffen werden die LGS klar und durchsichtig. Gute Begriffe und Bezeichnungen können ein Problem zur Routineaufgabe machen, schlechte zu einer sehr haarigen Angelegenheit.

1.3 Die Vektor–Matrix–Schreibweise eines LGS

Schaue noch einmal auf das LGS auf Seite 4 in der Darstellung in Gleichung (1). Auch zum Koeffizientenschema auf der linken Seite erschafft man ein Objekt eigenen Rechts, und zwar eine **Matrix**. Matrizen bezeichnet man mit großen lateinischen Buchstaben. Hier ist

$$A := \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 3 & 5 & 2 \\ -2 & 1 & -5 \end{pmatrix}$$

eine 3×3–Matrix. Eine $m \times n$–Matrix A hat m Zeilen und n Spalten. Der Eintrag, der in der i–ten Zeile an der j–ten Stelle der Matrix A steht, wird mit a_{ij} bezeichnet. Bei unserem Beispiel wäre $a_{21} = 3$ und $a_{23} = 2$. Mit

$$\vec{x} := \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \vec{b} := \begin{pmatrix} 8 \\ -1 \\ 19 \end{pmatrix}$$

schreibt man das ganze LGS kurz und elegant als

$$A\vec{x} = \vec{b} \quad .$$

Zwischen A und $\vec{x}$ steht wieder ein Malpunkt, und die Multiplikation eines Vektors mit einer Matrix geschieht dabei so, dass bei $A\vec{x}$ genau der Spaltenvektor herauskommt, der aus den linken Seiten des LGS in der ursprünglichen Gestalt besteht. Ich schreibe das formal halbwegs sauber hin, obwohl dich vielleicht ein leichtes Grauen befällt, wenn du das siehst.

3 Definition
Das Produkt einer $m \times n$–Matrix A mit einem Vektor $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ ist der Vektor $\vec{y} \in \mathbb{R}^m$ mit den Einträgen

$$y_i = a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{in}x_n = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}x_k \quad \textit{für } i = 1, 2, \ldots, m.$$

1.4 Ein LGS, das nicht eindeutig lösbar ist

Wenn wir ein LGS $A\vec{x} = \vec{b}$ lösen sollen, wenden wir den Gaußschen Algorithmus an. Bei einer quadratischen Matrix A, bei der das LGS genau so viele Gleichungen hat wie es Unbekannte gibt, kann das so laufen, dass eine vollständige Treppe herauskommt; wir rechnen die (dann eindeutig bestimmte) Lösung aus und alles ist gut. Es kann aber auch so laufen, dass eine ganze Matrixzeile (oder gar mehrere) praktisch wegfällt, weil es darin nur noch Nullen gibt. Das letzte erhaltene System könnte also etwa so aussehen:[2]

$$\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & 8 \\ 0 & -1 & 11 & 25 \\ 0 & 0 & 0 & c \end{array}$$

Hier sind nun zwei Fälle möglich:

1. Falls $c \neq 0$ ist, ist die Sache klar: Das LGS hat **keine** Lösung.

[2] Das ist das System von Seite 4; ich habe nur zwei Spalten vertauscht, damit nicht so furchtbare Zahlen auftreten.

2. Falls $c = 0$ ist, steht da

$$\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & 8 \\ 0 & -1 & 11 & 25 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \;.$$

Die letzte Gleichung sollte eigentlich x_3 festlegen, aber sie ist für jedes beliebige $\vec{x} \in \mathbb{R}^3$ erfüllt. Wir setzen für x_3 eine Variable t ein und berechnen damit wie üblich x_2 und x_1. Das führt zu $x_2 = 11t - 25$ und weiter zu

$$x_1 \;=\; 8 - x_2 + 2x_3 \;=\; 8 - (11t - 25) + 2t \;=\; -9t + 33 \quad .$$

Für t können wir einsetzen, was wir wollen, wir ergibt sich immer eine Lösung des LGS. Die gesamte Lösungsmenge hat unendlich viele Lösungen, sie ist „durch den Parameter t parametrisiert“:

$$\mathbb{L} \;=\; \left\{ \begin{pmatrix} -9t + 33 \\ 11t - 25 \\ t \end{pmatrix} \,\middle|\, t \in \mathbb{R} \right\}$$

Mit Hilfe unserer neuen Rechenarten zerlegen wir den allgemeinen Vektor $\vec{x}(t)$ der Lösungsmenge in

$$\vec{x}(t) \;=\; \begin{pmatrix} -9t + 33 \\ 11t - 25 \\ t \end{pmatrix} \;=\; \begin{pmatrix} -9t \\ 11t \\ t \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 33 \\ -25 \\ 0 \end{pmatrix} \;=\; t \begin{pmatrix} -9 \\ 11 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} +33 \\ -25 \\ 0 \end{pmatrix} \quad .$$

Ergebnis: Das LGS hat also entweder überhaupt keine Lösung oder gleich unendlich viele, und zwar so viele, wie es reelle Zahlen gibt. Welcher der beiden Fälle vorliegt, hängt nur von der rechten Seite $\vec{b}$ des LGS ab. Ob ein System eindeutig lösbar ist oder nicht, hängt dagegen einzig und allen von der Koeffizientenmatrix ab, denn auf der linken Seite entscheidet sich, ob eine komplette Treppenform herauskommt.

1.5 Numerische Komplikationen

Aufgabe. Wir wollen das folgende Gleichungssystem lösen:

$$\begin{aligned} x_1 + \sqrt{2}x_2 &= \sqrt{3} \\ \sqrt{2}x_1 + 2x_2 &= \sqrt{6+\delta} \end{aligned}$$

Dabei sei einmal $\delta = 0$ und einmal $\delta = 10^{-20}$.

Lösung. Wir schreiben das System in der üblichen Form

$$\begin{array}{cc|c} 1 & \sqrt{2} & \sqrt{3} \\ \sqrt{2} & 2 & \sqrt{6+\delta} \end{array} \quad .$$

Um es auf Treppenform zu bringen, subtrahieren wir das $\sqrt{2}$–fache der ersten Gleichung von der zweiten. Es ergibt sich

$$\begin{array}{cc|c} 1 & \sqrt{2} & \sqrt{3} \\ 0 & 0 & \sqrt{6+\delta} - \sqrt{6} \end{array} \quad .$$

Damit ist die Sache klar: Für $\delta \neq 0$ ist die Lösungsmenge leer, für $\delta = 0$ gibt es unendlich viele Lösungen! Dein Taschenrechner kann aber $\sqrt{6}$ und $\sqrt{6+\delta}$ für $\delta = 10^{-20}$ überhaupt nicht unterscheiden! Und wenn du die Wurzeln auf meinetwegen vier Nachkommastellen rundest, bekommst du ein eindeutig lösbares System. Probiere es selbst aus!

Was lernen wir daraus? Vertraue nicht blind dem Rechner, sondern sei auf der Hut!

1.6 Einige Anwendungen, die auf LGS führen

1.6.1 Ein Beispiel aus der Geometrie

Gegeben sei ein Dreieck ABC. Kann man Punkte P auf c, Q auf a und R auf b so finden, dass $d(A,P) = d(A,R)$ und $d(B,P) = d(B,Q)$ und $d(C,Q) = d(C,R)$ ist?

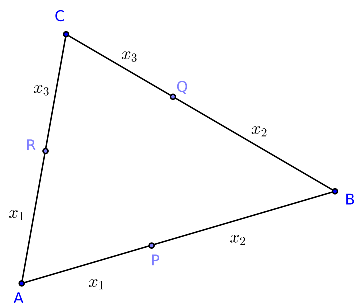


Abbildung 1: Teilstrecken, die eine Ecke gemeinsam haben, sollen jeweils gleich lang sein

Wenn wir die Bezeichnungen wie in Abbildung 1 wählen, erhalten wir das LGS

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c \\ a \\ b \end{pmatrix} \quad .$$

Mit Hilfe des Gaußschen Algorithmus bringen wir die linke Seite des Systems leicht auf Dreiecksform:

$$\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & c \\ 0 & 1 & 1 & a \\ 0 & 0 & 2 & b-c+a \end{array} \quad ,$$

und wir sehen, dass es genau eine Lösung gibt, ganz gleich, wie groß die Seitenlängen a, b und c sind.

Das Ergebnis ist eigentlich nicht überraschend: die Berührpunkte des Inkreises des Dreiecks mit den Seiten teilen die Seiten genau so, wie es verlangt ist. Klar?

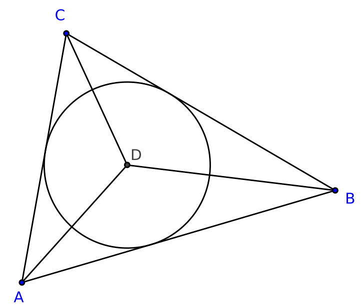


Abbildung 2: Der Inkreis berührt die Seiten in den richtigen Punkten

1.6.2 Zwei Steckbriefaufgaben aus der Analysis

1. **Aufgabe.** Gesucht ist die Gleichung einer Parabel, die durch die Punkte $(-1|8)$, $(1|0)$ und $(4|3)$ geht.

   Lösung. Mit dem Ansatz $p(x) = ax^2 + bx + c$ für den Parabelterm liefern die gegebenen Bedingungen ein 3×3–LGS für die Variablen a, b und c. In Vektor–Matrix–Schreibweise könnte es zum Beispiel so aussehen:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 16 & 4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 8 \\ 3 \end{pmatrix}$$

   Nach einem Gaußschritt haben wir

$$\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 8 \\ 0 & -12 & -15 & 3 \end{array} \quad ,$$

   das hat zwar nicht die klassische Treppenform, aber man kann die (eindeutig bestimmte!) Lösung sofort berechnen, indem man erst die zweite Gleichung ausnutzt. Es ist $b = -4$, $c = 3$ und $a = 1$, der gesuchte Parabelterm also

$$p(x) = x^2 - 4x + 3 \quad .$$

2. **Aufgabe.** Gesucht ist der Term $p(x)$ einer quadratischen Funktion, für den $p(-1) = p(3) = 2$ und $p'(1) = 0$ gilt.

   Lösung: Die Aufgabe sieht der vorigen sehr ähnlich. Wir beginnen mit dem gleichen Ansatz $p(x) = ax^2 + bx + c$, berechnen $p'(x) = 2ax + b$ und bilden wieder das 3×3–LGS, das sich aus den Bedingungen ergibt. Es lautet

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 9 & 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \quad ,$$

   und der Gaußsche Algorithmus macht daraus über

$$\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & -2 & -4 \\ 0 & 12 & -8 & -16 \end{array}$$

   schließlich

$$\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & -2 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \quad .$$

Das System hat unendlich viele Lösungen, und das muss auch so sein, wie du siehst, wenn du dir klarmachst, was die Bedingungen für den Graphen der Funktion bedeuten: aus $p(1) = p(3)$ folgt sofort, dass $p'(1) = 0$ sein muss.

Als Lösungsmenge erhalten wir

$$\mathbb{L} \;=\; \left\{ \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ -\frac{4}{3} \\ 0 \end{pmatrix} \;+\; t \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \\ 1 \end{pmatrix} \;\middle|\; t \in \mathbb{R} \right\} \quad .$$

Jedes Element der Lösungsmenge liefert eine Parabel. Die Bedingungen werden von allen Kurven der Parabelschar

$$p_t(x) = \left(\frac{2}{3} - \frac{1}{3}t\right) x^2 + \left(-\frac{4}{3} + \frac{2}{3}t\right) x + t$$

erfüllt.

1.6.3 Ein System von Wasserleitungen

Hier siehst du ein System von Wasserleitungen.[3] Die Zahlen geben jeweils an, wieviele Liter je Minute in das System hinein oder aus ihm herausfließen. Es soll keine zeitliche Veränderung geben, das System soll sich also „in einem stationären Zustand" befinden. Wie groß müssen dann die Werte der x_i sein, die angeben, wieviele Liter je Minute durch die entsprechenden Rohre fließen?

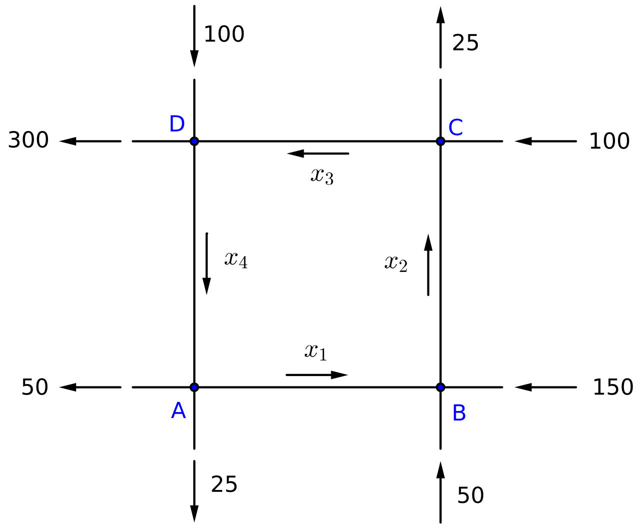


Abbildung 3: Ein System von Wasserleitungen

Lösung. Mit der Angabe, dass sich das System in einem stationären Zustand befindet, gebe ich den Hinweis, dass in jeden der vier Schnittpunkte in einer Zeiteinheit soviel Wasser hineinlaufen muss, wie auch herausläuft, sonst gäbe es dort ewig sprudelnde Quellen oder ewig schluckende Senken. Man macht nun für jeden Punkt eine Bilanz und erhält so vier Gleichungen:

$$\begin{aligned} \text{A}: &\quad x_4 = x_1 + 25 + 50 \\ \text{B}: &\quad x_2 = x_1 + 50 + 150 \\ \text{C}: &\quad x_3 = x_2 + 100 - 25 \\ \text{D}: &\quad x_4 = x_3 + 100 - 300 \end{aligned}$$

Diese Gleichungen bilden ein 4×4–LGS. In Vektor–Matrix–Schreibweise sieht das so aus:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -75 \\ -200 \\ -75 \\ 200 \end{pmatrix}$$

[3] Das Beispiel stammt aus Kroll/Reiffert/Vaupel, Analytische Geometrie / Lineare Algebra, Bonn 1997 (S.95). Statt Rohren und Wasser kannst du auch an Straßen und Autos denken.

Der Gaußsche Algorithmus macht daraus schließlich

$$\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & -1 & -75 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & -125 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & -200 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} .$$

Das System hat unendlich viele Lösungen, x_4 ist frei wählbar. Als Lösungsmenge habe ich heraus

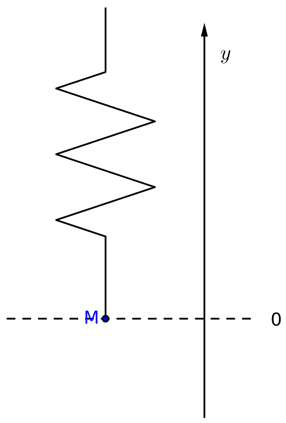
$$\mathbb{L} = \left\{ \begin{pmatrix} -75 \\ 125 \\ 200 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \;\middle|\; t \in \mathbb{R} \right\} ,$$

rechne das nach!

1.6.4 Numerische Lösung einer Randwertaufgabe

Nun folgt ein etwas komplexeres Beispiel, das aber sehr typisch ist. Zahllose Probleme aus Anwendungssituationen werden auf ähnliche Weise mit Hilfe von LGS gelöst. Nicht selten sind die Systeme sehr groß, die gelöst werden müssen; wir begnügen uns aber mit einem kleinen Beispiel. Los geht's!

1. **Ausgangssituation**
   Ein Massenpunkt M hängt an einer Schraubenfeder. Bringt man den Punkt etwas aus seiner Ruhelage, indem man ihn senkrecht nach unten zieht, und lässt ihn dann los, schwingt er auf und ab. Zur Zeit x befinde sich der Massenpunkt an der Stelle $y = f(x)$. Die Physik lehrt, dass die Funktion f die Differentialgleichung
   $$f''(x) \;=\; -cf(x) \qquad (2)$$
   erfüllt. Dabei ist c eine positive Konstante, die z.B. von der Feder abhängt.



2. **Problemstellung**
   Wir gehen davon aus, dass wir beobachtet haben, wo sich der Massenpunkt zu den Zeiten $x = 0$ und $x = 1$ befand, und dass wir den Wert von c kennen. Unsere Aufgabe lautet dann: Bestimme eine Funktion
   $$f \text{ mit } f''(x) = -cf(x) \text{ und } f(0) = a \text{ und } f(1) = b. \qquad (3)$$
   Eine solche Aufgabe heißt **Randwertaufgabe**. Timon hatte die Zahlen $c = 5$, $a = f(0) = 4$ und $b = f(1) = 6$ gewählt; wenn dir das hilft, nimm die konkreten Werte.

3. **Diskretisierung**
   Von der Differentialgleichung (2) kommt man zu einem LGS, indem man **diskretisiert**: Man ersetzt die Ableitungen durch Differenzenquotienten. Zum Beispiel ist in sehr guter Näherung
   $$f'\left(x + \frac{1}{2}\Delta x\right) \;\approx\; \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$
   und
   $$f'\left(x - \frac{1}{2}\Delta x\right) \;\approx\; \frac{f(x) - f(x-\Delta x)}{\Delta x} \quad .$$
   Setzt man diese Terme in die entsprechende Näherung
   $$f''(x) \;\approx\; \frac{f'\left(x + \frac{1}{2}\Delta x\right) - f'\left(x - \frac{1}{2}\Delta x\right)}{\Delta x}$$

ein, ergibt sich nach etwas Bruchrechnung

$$f''(x) \;\approx\; \frac{f(x-\Delta x) - 2f(x) + f(x+\Delta x)}{(\Delta x)^2} \quad . \tag{4}$$

4. **Konstruktion des LGS**
   Man geht nun folgendermaßen vor. Man teilt das betrachtete Intervall $[0,1]$ der x–Achse durch n Zwischenstellen $x_1, x_2, \ldots, x_n$ in $n+1$ Abschnitte gleicher Länge $\Delta x = \frac{1}{n+1}$ ein. Vom Graphen der gesuchten Funktion f kennt man die Punkte $(0|a)$ und $(1|b)$, und man hätte gern die Punkte

   $$(x_1|y_1),\ (x_2|y_2),\ \ldots,\ (x_n|y_n)$$

   des Graphen von f. Beachtet man, dass $f''(x) = -cf(x)$ ist, liefert Gleichung (4) nach Multiplikation mit $(\Delta x)^2$ die Näherung

   $$-cf(x)(\Delta x)^2 \;\approx\; f(x-\Delta x) - 2f(x) + f(x+\Delta x) \quad .$$

   Also gilt

   $$f(x-\Delta x) + (-2 + c(\Delta x)^2)f(x) + f(x+\Delta x) \;\approx\; 0 \quad . \tag{5}$$

   Wir setzen nun für x der Reihe nach die Zwischenwerte $x_1, x_2, \ldots, x_k, \ldots, x_n$ ein. Wenn $x = x_k$ ist, ist $x - \Delta x = x_{k-1}$ und $x + \Delta x = x_{k+1}$. Für die Funktionswerte $f(x_k)$ usw. schreiben wir y_k usw. Dann erhalten wir

   $$y_{k-1} + (-2 + c(\Delta x)^2)y_k + y_{k+1} \;\approx\; 0 \quad \text{für } k = 1, 2, 3, \ldots, n.$$

   Wir machen aus dem $\approx$ ein $=$, dann haben wir n Gleichungen für Näherungswerte der gesuchten Funktionswerte $y_1, y_2, \ldots, y_n$ vor uns, also ein $n \times n$–LGS. Das muss man lösen.

5. **Konkretes LGS für Timons Daten für $n = 3$**
   Für $n = 3$ ist $\Delta x = 0.25$, also $-2 + c(\Delta x)^2 = -1,6875$. Beachte, dass Timon $y_0 = f(0) = 4$ und $y_4 = f(1) = 6$ gewählt hat. Die Konstanten y_0 und y_4 bringt man auf die rechte Seite. Dann sieht das LGS so aus:

   $$\begin{array}{ccc|c} -1.6875 & 1 & 0 & -4 \\ 1 & -1.6875 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1.6875 & -6 \end{array}$$

   Für $n = 4$ bekommt man entsprechend

   $$\begin{array}{cccc|c} -1.8 & 1 & 0 & 0 & -4 \\ 1 & -1.8 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1.8 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1.8 & -6 \end{array} ,$$

   ich hoffe, du hast einen Eindruck, wie sich die Matrix bei wachsendem n weiter entwickelt. In jeder Zeile sind nur drei Werte ungleich 0.

6. **Ergebnis**
   Timons Gleichungssystem hatten wir schon in der Stunde gelöst. Damit haben wir Näherungswerte für die Funktionswerte $f(x_1), f(x_2), f(x_3)$. Diese liefern uns Punkte, die in der Nähe des Graphen der exakten Lösung der Randwertaufgabe liegen sollten. Wie gut das geklappt hat, zeigt Abbildung 4. Die Kurve

ist der Graph der exakten Lösing des Problems, der Polygonzug verbindet die Punkte $(x_k|\tilde{y}_k)$, wobei $\tilde{y}_k$ jeweils der Näherungswert für $f(x_k)$ ist. Die Lösung passt schon für unser Beispiel mit $n = 3$ erstaunlich gut, bei $n = 10$ kann man die beiden Graphen kaum noch unterscheiden.[4]

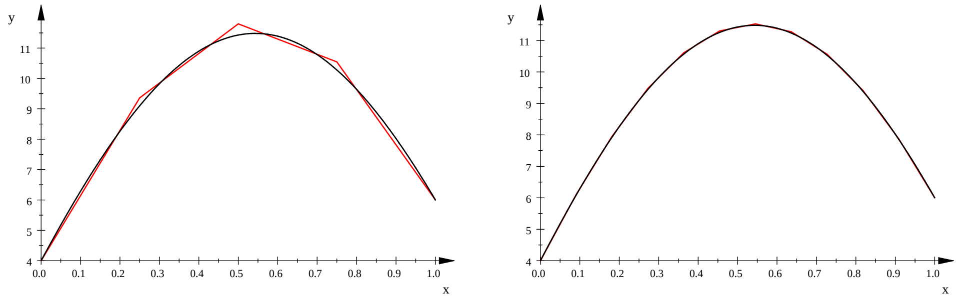


Abbildung 4: Exakte Lösung für Timons Daten und Näherungslösung dazu für $n = 3$ (links) und für $n = 10$ (rechts)

7. **Mehr Schwingungen**
   Wenn das c größer gewählt wird, macht die Lösungskurve im Intervall $[0, 1]$ mehr Schwingungen. Mit kleinen n kommt man dann nicht mehr weit: schaue dir Abbildung 5 auf Seite 18 an!

8. **Fragen und Aufgaben zur Vertiefung**

   (a) Rechne nach, dass $f(x) = B\sin(\omega x)$ eine Lösung der Differentialgleichung (2) ist, und bestimme B und ω so, $f(x)$ die Randwertaufgabe mit $a = 0$ und $b = 6$ löst.

   (b) Stelle das LGS für Timons Daten und $n = 5$ auf.

   (c) Rekapituliere, wie die Näherungen zustande kommen. Zeichne auch Skizzen.

[4] Falls MuPAD bei dir läuft, kannst du mit randwertAufg.mn selbst Beispiele rechnen.

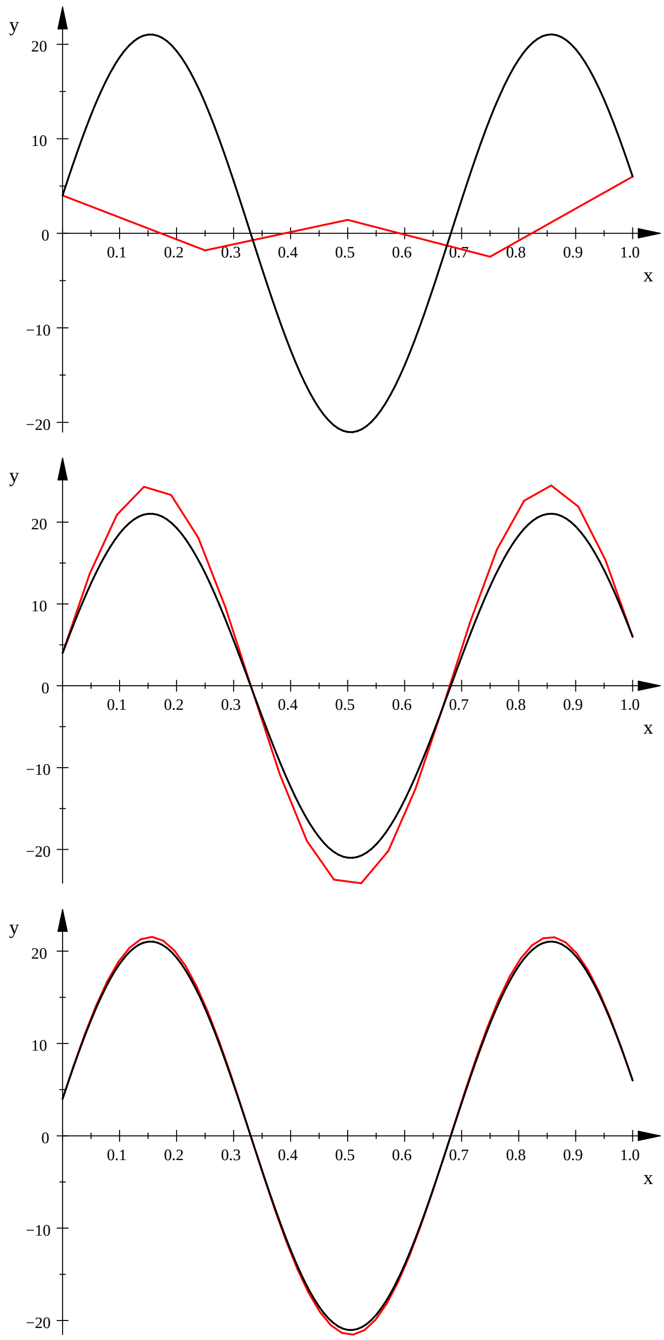


Abbildung 5: Exakte Lösung für $c = 80,\ a = 4,\ b = 6$ und Näherungslösung dazu für $n = 3$ (oben), für $n = 20$ (Mitte) und $n = 50$ (unten)

1.6.5 Eine Mischungsaufgabe

In dem Buch von Artmann und Törner steht gleich zu Anfang eine Mischungsaufgabe, die auf ein LGS führt. Man hat vier verschiedene Aluminiumlegierungen, die jeweils Titan und Chrom in bestimmten Anteilen enthalten. Die Frage ist, ob sich eine gewünschte Aluminiumlegierung aus diesen vier Sorten mischen lässt. Diese Frage führt auf das 3×4–LGS

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0.06 & 0.01 & 0.04 & 0.03 \\ 0.01 & 0.03 & 0 & 0.04 \end{pmatrix} \vec{x} \;=\; \begin{pmatrix} 1 \\ 0.04 \\ 0.02 \end{pmatrix} \quad .$$

Die Einträge von $\vec{x}$ sind die Mengen der vier Sorten (in Mengeneinheiten), die zusammen eine Mengeneinheit der neuen Sorte ergeben sollen. Die zweite Gleichung ist eine Titanbilanz, die dritte eine Chrombilanz.[5]

Da wir eine Gleichung zu wenig haben, kann von vornherein keine vollständige Treppenform herauskommen. Der Gaußsche Algorithmus führt zu dem System

$$\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -0.05 & -0.02 & -0.03 & -0.02 \\ 0 & 0 & -0.018 & 0.018 & 0.002 \end{array} \quad .$$

Die Lösungsmenge des Systems ist

$$\mathbb{L} \;=\; \left\{ \begin{pmatrix} \frac{2}{3} - t \\ \frac{4}{9} - t \\ -\frac{1}{9} + t \\ t \end{pmatrix} \;\middle|\; t \in \mathbb{R} \right\} \;=\; \left\{ \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{4}{9} \\ -\frac{1}{9} \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \;\middle|\; t \in \mathbb{R} \right\} \quad .$$

Nicht alle Lösungen des Systems sind im praktischen Kontext brauchbar; denn die Einträge eines Lösungsvektors sind ja Maßzahlen von Mengeneinheiten, sie dürfen nicht negativ sein. Es muss also gelten

$$t \leq \frac{2}{3} \quad \text{und} \quad t \leq \frac{4}{9} \quad \text{und} \quad t \geq \frac{1}{9} \quad \text{und} \quad t \geq 0 \quad ,$$

insgesamt folglich

$$\frac{1}{9} \leq t \leq \frac{4}{9} \quad .$$

Der Preis einer Mengeneinheit ist dann

$$2\left(\frac{2}{3} - t\right) + \frac{4}{9} - t + 3\left(-\frac{1}{9} + t\right) + 2t \;=\; 2t + \frac{13}{9} \quad ,$$

die günstigste Mischung ist die zu $t = \frac{1}{9}$, und eine Mengeneinheit davon kostet $\frac{14}{9}$ TDM.

[5] Das musst du dir gut klarmachen!

2 Matrixabbildungen 1

2.1 Nachdenken über Gleichungen

Es gibt Gleichungen, die in gewissem Sinne allgemeingültig sind, wie $a+b=b+a$ oder $(f(g(x)))' = f'(g(x))g'(x)$. Solche Gleichungen formulieren Gesetze. Du begegnest aber häufig Gleichungen, bei denen du suchen sollst, was man für eine Variable einsetzen muss, damit da etwas Wahres steht. Ein Beispiel für eine solche Bestimmungsgleichung ist die Differentialgleichung

$$y' \;=\; -5y \quad \text{oder, anders geschrieben} \quad f'(x) = -5f(x) \;\;.$$

Hier ist das gesuchte Objekt eine **Funktion**, bei der Gleichung

$$A\vec{x} \;=\; \vec{b}$$

mit einer $m \times n$–Matrix A dagegen ein **Spaltenvektor** des $\mathbb{R}^n$.

Ursprünglich waren es immer nur **Zahlen**, die du zu Gleichungen wie

$$x^3 - 8x^2 + 3x - 123 \;=\; 0 \quad \text{oder} \quad x^2 - 8x + 20 \;=\; 0$$

suchen solltest.

Aufgabe. Bestimme k so, dass $y = f(x) = e^{kx}$ eine Lösung der Differentialgleichung oben ist.

2.2 Gleichungen und Funktionen

Für die Gleichungen $A\vec{x} = \vec{b}$ und $x^2 - 8x + 20 = 0$ haben wir Lösungsalgorithmen. Anders sieht das bei dem Beispiel

$$x^3 - 8x^2 + 3x - 124 \;=\; 0$$

aus, da haben wir eigentlich nur Näherungsverfahren zur Hand. Aber wir wissen genau, dass die Gleichung mindestens eine Lösung haben muss: Wir sehen die linke Seite als Term einer Funktion

$$f : x \mapsto x^3 - 8x^2 + 3x - 124$$

an. Für x gegen unendlich strebt $f(x)$ gegen unendlich, für x gegen minus unendlich strebt $f(x)$ gegen minus unendlich. Das heißt, $f(x)$ nimmt bestimmt sowohl positive als auch negative Werte an, und da der Graph von f eine durchgezogene Linie ist, muss er die x–Achse schneiden, und die Stellen, an denen er das tut, sind genau die Lösungen der Gleichung.

Das ist dir so vertraut, dass es dich vielleicht irritiert, dass ich das breit auswalze. Aber damit will ich dich nur darauf einstimmen, dass ich bei der Vektor–Matrix–Gleichung $A\vec{x} = \vec{b}$ die linke Seite als Term einer Funktion

$$\varphi : \; \vec{x} \mapsto A\vec{x} \tag{6}$$

ansehe, der durch die Matrix A gegebenen **Matrixabbildung**. Das Studium solcher Abbildungen[6] lohnt um seiner selbst willen, und es bringt neue Einsichten in der Raumgeometrie und über Lösungsmengen von LGS.

[6]Abbildung und Funktion sind zwei Worte für die selbe Sache. In der Analysis sagt man eher Funktion, in der Algebra eher Abbildung.

2.3 Gesetze der Matrix–Vektor–Multiplikation

4 Lemma
Es sei A eine $m \times n$–Matrix. Dann gilt für alle $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^n$ und alle $f \in \mathbb{R}$

$$A(\vec{x}+\vec{y}) \;=\; A\vec{x}+A\vec{y} \quad \text{und} \quad A(r\vec{x}) \;=\; r(A\vec{x}) \;\;.$$

Der Beweis ist nicht weiter tiefsinnig: man schreibt jeweils aus, was auf der rechten und auf der linken Seite steht, dann sieht man, dass die Terme gleich sind. Führe das mal für eine allgemeine 2×2–Matrix durch.

Diese schlichten Regeln gewinnen eine enorme Aussagekraft, wenn man sie geometrisch deutet. Für ein $\vec{v} \in \mathbb{R}^3$, $\vec{v} \neq \vec{0}$, ist

$$\{\, r\vec{v} \,|\, r \in \mathbb{R} \,\}$$

so etwas wie eine Gerade durch den Nullpunkt. Das Bild dieser Geraden unter einer Matrixabbildung $\varphi : \vec{x} \mapsto A\vec{x}$ ist dann[7] wegen

$$A(r\vec{v}) \;=\; r(A\vec{v})$$

eine Gerade durch den Nullpunkt im Bildraum.[8] Und das Bild einer Geraden im Ursprungsraum mit Stützvektor $\vec{a}$ und Richtungsvektor $\vec{v}$ ist (im Allgemeinen) eine Gerade im Bildraum mit Stützvektor $A\vec{a}$ und Richtungsvektor $A\vec{v}$. Matrixabbildungen sind mit geometrischen Strukturen verträglich, und das macht sie zu nützlichen Werkzeugen in der Geometrie!

[7] im Allgemeinen! Über die Ausnahme sprechen wir später.

[8] Mehr noch: durch den Parameter r gestiftete Muster auf der Originalgeraden werden auf die Bildgerade übertragen. Ich erkläre das noch ausführlicher.

2.4 Bilderbuch zu Matrixabbildungen der Ebene

Schau, hier habe ich eine nette Sammlung von 2×2–Matrizen:

$$M_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad M_1 = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad M_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix},$$

$$M_3 = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \qquad M_4 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad M_5 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$M_6 = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \qquad M_7 = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$$

Jede der Matrizen definiert eine Matrixabbildung. Diese Matrixabbildungen habe ich jeweils auf die folgende Figur angewandt:

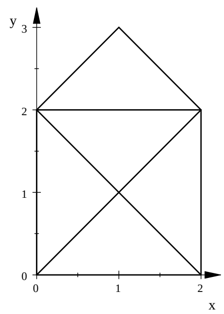


Abbildung 6: Originalfigur in der Ebene

Die Ergebnisse siehst du in Abbildung 7 auf der Seite 23, und zwar jeweils Figur und Bildfigur. Versuche, bei jeder Matrix die geometrische Wirkung zu sehen, und ordne die Bilder den Matrizen zu. Ein Bild fehlt übrigens; zu welcher Matrix gehört es?

Nebenbei: alle Matrizen gehören zu Abbildungen, die in der Geometrie verwandt werden – außer einer, das ist eine Kraut–und–Rueben–Matrix.

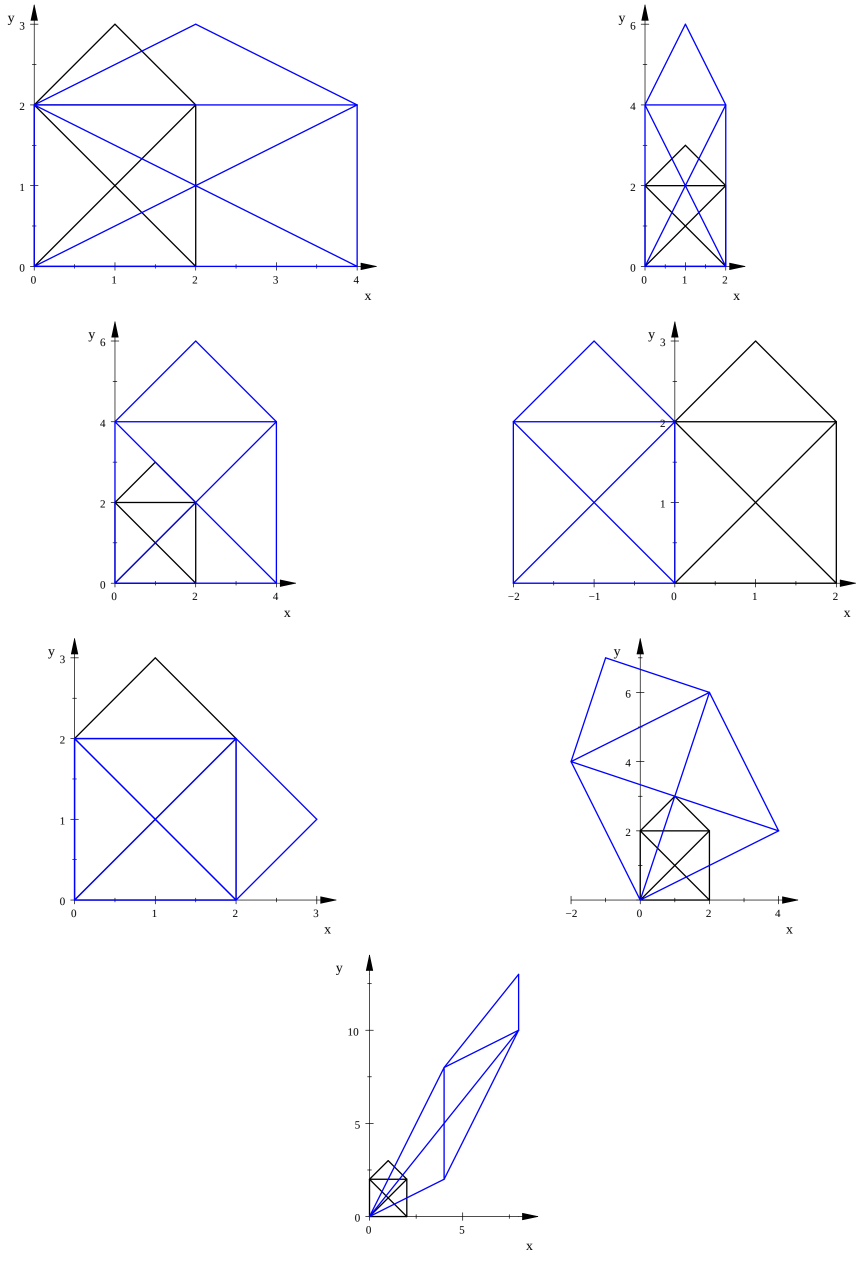


Abbildung 7: Sammlung von Paaren aus Urbild (schwarz) und Bild (blau)

3 Raumgeometrie: Punkte, Geraden, Ebenen

3.1 Einführung: Algebra und Geometrie

Du hast gelernt, mit LGS umzugehen, du kennst den Spaltenraum $\mathbb{R}^n$, du weißt, dass man die Elemente des R^n als Vektoren bezeichnet, und du kannst damit rechnen, dir sind Matrizen begegnet, zuerst als Koeffizientenschema bei LGS, du kannst mit Hilfe der Vektor–Matrix–Multiplikation LGS in der Form $A\vec{x} = \vec{b}$ schreiben und du hast gelernt, dass durch die Matrix A eine Matrixabbildung $\varphi : \vec{x} \mapsto A\vec{x}$ gegeben ist. All das gehört zur Linearen Algebra. Es wird nun Zeit, einen Blick auf das zweite Gebiet im Namen des Halbjahrsthemas zu werfen, also auf die Geometrie.

Historisch gesehen lief das alles anders herum: die Geometrie ist uralt; die Lineare Algebra wurde erst ziemlich spät entwickelt, und die Begriffsbildungen der Linearen Algebra sind stark durch geometrische Vorstellungen motiviert. Ich will damit nur sagen, dass zwischen diesen beiden Gebieten eine enge Beziehung besteht, und etwas davon sollst du nun zu sehen bekommen.

Wir verwenden den $\mathbb{R}^n$ konkret für $n = 3$. Zu jedem $\vec{x} \in \mathbb{R}^3$ gehört in natürlicher Weise, wenn man ein Koordinatensystem festgelegt hat, ein **Raumpunkt** X:

$$\vec{x} \;=\; \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \quad\longleftrightarrow\quad X(x_1|x_2|x_3) \tag{7}$$

Das ist erst einmal unkritisch. Heikler wird es, wenn wir in der Geometrie nachbilden, was $\vec{x} + \vec{y}$ und $r\vec{x}$ bedeuten. Mit Punkten rechnen wir nicht!

Es gibt hier zwei Ansätze, jeder hat Vor– und Nachteile. Einmal denkt man sich zu $\vec{x}$ den Pfeil, der im Raum vom Nullpunkt zum Punkt X zeigt – man spricht von **Ortsvektoren**. Zu $r\vec{x}$ gehört dann der Pfeil, den man bekommt, wenn man den Pfeil zu $\vec{x}$ am Nullpunkt mit dem Faktor r zentrisch streckt. Der neue Pfeil hat die $|r|$–fache Länge des alten; für $r > 0$ zeigt er in die gleiche Richtung, für $r < 0$ ist er umgedreht. Zu $\vec{x} + \vec{y}$ gehört der Pfeil, den du bekommst, wenn du den Pfeil zu $\vec{y}$ so parallel verschiebst, dass er an der Spitze des Pfeils zu $\vec{x}$ beginnt – das ist die Resultierende des alten Kräfteparallelogramms aus der Mittelstufenphysik. Der Nullpunkt, die Punkte X, Y und der neue Punkt Z zu $\vec{x} + \vec{y}$ bilden ein Parallelogramm $OXZY$ (siehe Abbildung 8 auf Seite 25).

Das Problem bei der Sache ist, dass man zu Punkten P und Q auch den Pfeil $\overrightarrow{PQ}$ bilden will, der bei P beginnt und bei Q endet. Der Spaltenvektor zu diesem Pfeil ist $\vec{q} - \vec{p}$, aber der gehört ja eigentlich schon zu einem anderen Pfeil, der im Nullpunkt beginnt. Mit dieser Mehrdeutigkeit muss man leben, wenn man nicht einen sehr sperrigen Apparat hochfahren will.

Die Mehrdeutigkeit wird vermieden, wenn man unter $\vec{x}$ die **Parallelverschiebung** des Raumes versteht, die den Nullpunkt in den Punkt X bringt. Sauber ist das dann; ob es für dich hilfreich ist, musst du selbst herausfinden.

Ist die Korrespondenz zwischen Punkten und Spaltenvektoren erst einmal etabliert, kann man geometrische Objekte des Raumes mit Hilfe algebraischer Konstruktionen im $\mathbb{R}^3$ nachbilden – und sie damit identifizieren und rechnerischer Behandlung zugänglich machen:

$$\{\, r\vec{v} \,|\, r \in \mathbb{R} \,\} \quad\longleftrightarrow\quad \text{Gerade OV} \tag{8}$$

$$\{\, \vec{a} + r\vec{v} \,|\, r \in \mathbb{R} \,\} \quad\longleftrightarrow\quad \text{zur Geraden } OV \text{ parallele Gerade durch } A \tag{9}$$

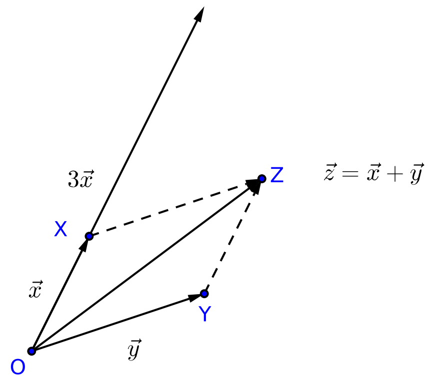


Abbildung 8: Geometrische Bedeutung von $\vec{x} + \vec{y}$ und von $r\vec{x}$

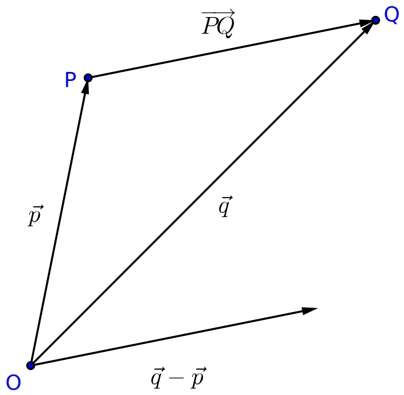


Abbildung 9: $\vec{q} - \vec{p}$ und der Pfeil von P nach Q

Freilich darf hier $\vec{v}$ nicht der Nullvektor $\vec{0}$ sein.

Ich setze das gleich mal ein wenig fort: Zu Raumpunkten A und B mit den Ortsvektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ bilden wir

$$\text{die Gerade } AB \quad \leftrightarrow \quad \left\{ \vec{a} + t(\vec{b} - \vec{a}) \,|\, t \in \mathbb{R} \right\} \quad , \tag{10}$$

$$\text{die Strecke } \overline{AB} \quad \leftrightarrow \quad \left\{ \vec{a} + t(\vec{b} - \vec{a}) \,|\, 0 \leq t \leq 1 \right\} \tag{11}$$

und den

$$\text{Mittelpunkt } M \text{ der Strecke } \overline{AB} \quad \leftrightarrow \quad \vec{m} \;=\; \vec{a} + \frac{1}{2}(\vec{b} - \vec{a}) \;=\; \frac{1}{2}(\vec{a} + \vec{b}) \quad . \tag{12}$$

3.2 Geraden

Die vektorielle Beschreibung von Geraden mit Hilfe von Mengen ist etwas unhandlich. Weil man sehr viel mit Geraden zu tun hat, wurden da besondere Sprech– und Schreibweisen entwickelt.

Man nennt die Gerade zur Vektormenge

$$\{\, \vec{a} + r\vec{v} \,|\, r \in \mathbb{R} \,\}$$

die Gerade mit dem **Stützvektor** $\vec{a}$ und dem **Richtungsvektor** $\vec{v}$. Freilich darfst du nie den Nullvektor als Richtungsvektor nehmen: $\vec{v} \neq \vec{0}$. Wenn die Gerade meinetwegen den Namen g trägt, schreibt man

$$g: \;\; \vec{x}(t) = \vec{a} + t\vec{v} \tag{13}$$

und nennt $\vec{x}(t)$ den **allgemeinen Vektor** von g. Eigentlich ist, wenn man das so schreibt, $\vec{x}$ eine Parameterdarstellung, hier eine Abbildung $\mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$, aber das erwähne ich nur, um an Bekanntes anzuknüpfen.

Die Gerade AB durch (zwei verschiedene) Punkte A und B erhält man dann sofort in der Form

$$AB: \;\; \vec{x}(t) \;=\; \vec{a} + t\overrightarrow{AB} \;\; .$$

Ändere hier nichts ab: Jeder Punkt der Geraden bekommt durch diese Darstellung einen Parameterwert, der Punkt A den Wert $t = 0$, der Punkt B den Wert $t = 1$, der Mittelpunkt der Strecke $\overline{AB}$ der Wert $t = \frac{1}{2}$.

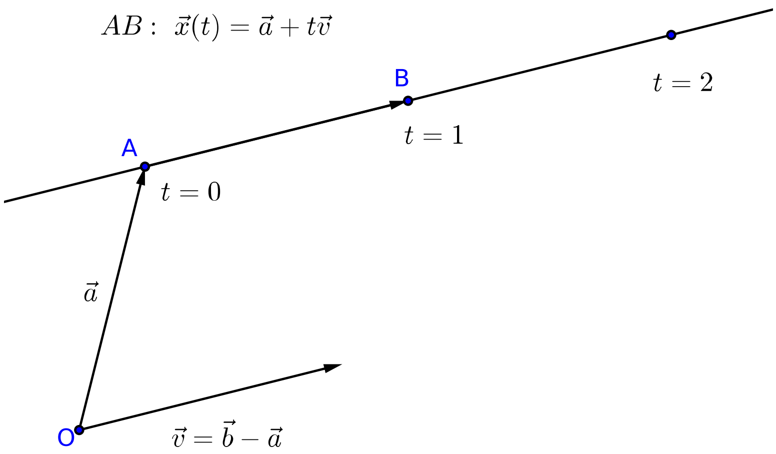


Abbildung 10: Gerade AB durch A und B

Anmerkung. So, halten wir einmal kurz inne, bevor wir auf technische Fragen kommen. Schaue dir diese Aussage an – sie ist veranschaulicht in Abbildung 11 auf Seite 27:

Die Geraden

$$g: \;\; \vec{x}(t) = \vec{a} + t\vec{v} \qquad \text{und} \qquad h: \;\; \vec{y}(s) = \vec{b} + s\vec{w}$$

sind genau dann parallel, wenn $\vec{v} \neq \vec{0}$ ein Vielfaches von $\vec{w} \neq \vec{0}$ ist.

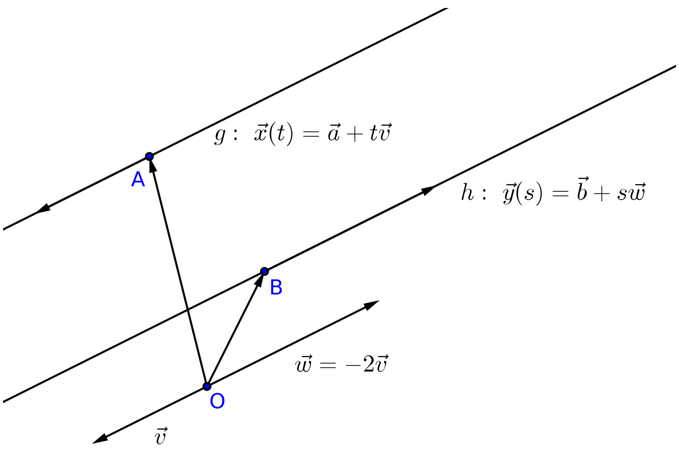


Abbildung 11: Parallele Raumgeraden

Für was hältst du diese Aussage? Für einen mathematischen Satz? Dann muss man ihn beweisen. Dazu brauchst du aber erst einmal eine gescheite geometrische Definition von Parallelität im Raum, überhaupt einen belastbaren sauberen Aufbau der Raumgeometrie aus Axiomen – völlig unerreichbar für uns. Nimm die Aussage meinetwegen als Definition oder Übereinkunft, wann wir zwei Geraden parallel nennen wollen. Wir haben eine saubere algebraische Aussage, und die kennzeichnet ein Phänomen, was wir anschaulich als Parallelität empfinden. So nagelt man Pudding an die Wand.

Technische Aufgaben. Es sei g die Gerade durch $A(1|-2|4)$ und $B(-3|1|2)$.

1. Stelle eine Parametergleichung für g auf und gib drei weitere Punkte von g an.
2. Gib den Mittelpunkt von $\overline{AB}$ an.
3. Liegt $P(161|-121|83)$ auf g?
4. In welchem Punkt schneidet die Gerade g die xy–Ebene?
5. Gib eine Parallele zu g durch den Punkt $(1|2|3)$ an.
6. Die gegebenen Punkte A und B sind ja keineswegs besondere Punkte der Geraden g. Nimm zwei beliebige andere Punkte von g und bilde damit eine neue Parameterdarstellung von g. Offensichtlich geht das. Das heißt aber, dass durchaus zwei Parameterdarstellungen, die verschieden aussehen, die gleiche Gerade beschreiben können! Kann man denen irgendwie ansehen, dass sie die gleiche Gerade beschreiben?

3.3 Die „gegenseitige Lage“ zweier Geraden

Es seien zwei Geraden

$$g:\ \vec{x}(t) = \vec{a} + t\vec{v} \qquad \text{und} \qquad h:\ \vec{x}(t) = \vec{b} + t\vec{w} \tag{14}$$

im Raum gegeben. Man will nun wissen, wie die Geraden zu einander liegen. Im Prinzip gibt es vier Möglichkeiten:

1. Sie sind nicht parallel und schneiden sich nicht – dann nennt man sie „windschief“.

2. Sie sind nicht parallel und schneiden sich in einem Punkt.

3. Sie sind parallel und verschieden.

4. Es handelt sich um zwei Darstellungen der selben Geraden.

Um zu entscheiden, welcher Fall vorliegt, kannst du natürlich den üblichen Schnittpunktansatz machen und die Lösungsmenge des entstehenden 3×2–LGS bestimmen. Ich rate dir aber, wie folgt vorzugehen:

1. Schaue erst nach, ob die Geraden parallel sind, also ob $\vec{v}$ ein Vielfaches von $\vec{w}$ ist. Das ist leicht zu sehen.

2. Falls sie parallel sind, prüfst du, ob B auf g liegt – dazu löst du das LGS $\vec{b} = \vec{a} + t\vec{v}$. Falls ja, ist $g = h$, falls nein, sind die Geraden parallel und verschieden.

3. Falls die Geraden nicht parallel sind, machst du den üblichen Schnittpunktansatz[9]
$$\vec{a} + t\vec{v} \quad = \quad \vec{b} + s\vec{w} \quad ,$$
die Lösungsmenge ist dann einelementig oder leer.

Aufgabe. Hannes sollte die gegenseitige Lage zweier Geraden wie in Gleichung (14) untersuchen. Wider meine Empfehlung machte er gleich den (korrekten) Schnittpunktansatz und löste das LGS $t\vec{v} - s\vec{w} = \vec{b} - \vec{a}$. Du siehst hier vier mögliche Formen, die Hannes mit Hilfe des Gaußschen Algorithmus erhalten hat. Welcher Fall liegt jeweils vor? Begründe.

$$(1)\quad \begin{array}{cc|c} 1 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \qquad\qquad (2)\quad \begin{array}{cc|c} 1 & -2 & -5 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 6 \end{array}$$

$$(3)\quad \begin{array}{cc|c} 1 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \qquad\qquad (4)\quad \begin{array}{cc|c} 1 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}$$

[9] Achtung: einen Parameter nötigenfalls umbenennen! Es muss ein 3×2–LGS entstehen!

3.4 Julians Problem

Julian will ein räumliches Objekt zeichnen. Dazu wählt er einen Gitterpunkt seines Kästchenpapiers als Nullpunkt O des Systems und zeichnet Bilder der drei Achsen ein. Seine x_1–Achse geht durch den Kästchenpunkt $(-2|-1)$ – man läuft von O aus also zwei Kästchen nach links und ein Kästchen nach unten. Der Punkt $(-2|-1)$ ist auch gleich der Bildpunkt des Raumpunktes $(1|0|0)$. Der Raumpunkt $(0|1|0)$ kommt nach $(4|0)$, der Raumpunkt $(0|0|1)$ nach $(0|4)$, damit ist alles festgelegt.

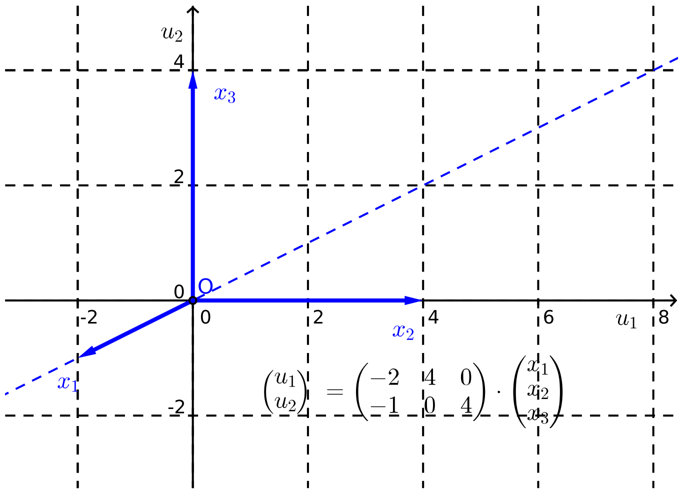


Abbildung 12: Julians System

Um den Punkt auf dem Kästchenpapier zu finden, in dem der Raumpunkt $P(x_1|x_2|x_3)$ gezeichnet wird, läuft er von O bis zur Spitze des Pfeils $x_1 \cdot \binom{-2}{-1}$, von dort aus weiter um $x_2 \cdot \binom{4}{0}$ und von dort aus weiter um $x_3 \cdot \binom{0}{4}$, dann ist er beim Bildpunkt P' von P. Der Ortsvektor von P' ist demnach

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} &= x_1 \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -2 & 4 & 0 \\ -1 & 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \quad . \end{aligned}$$

Das ist nun schon ein verblüffendes Ergebnis (das man freilich nur sieht, wenn man scharf genug hinschaut): Der Ortsvektor $\vec{u} \in \mathbb{R}^2$ des Bildpunktes in der Zeichenebene eines Raumpunktes mit dem Ortsvektor $\vec{x} \in \mathbb{R}^3$ ist das Bild von $\vec{x}$ unter einer Matrixabbildung $\vec{x} \mapsto M\vec{x}$. Und man sieht gleich noch mehr: Die Spaltenvekoren $\vec{m}_1, \vec{m}_2, \vec{m}_3$ der Matrix $M = (\vec{m}_1, \vec{m}_2, \vec{m}_3)$ sind die Bilder der Einheitsvektoren

$$\vec{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad , \quad \vec{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad , \quad \vec{e}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

und

$$M\vec{x} \;=\; (\vec{m}_1, \vec{m}_2, \vec{m}_3)\,\vec{x} \;=\; x_1\vec{m}_1 + x_2\vec{m}_2 + x_3\vec{m}_3 \quad :$$

Jeder Bildvektor ist Linearkombination der Spaltenvektoren der Matrix. Prägt euch dieses Merkverslein gut ein, dann habt ihr Matrixabbildungen im Griff.

Technische Übungen

1. Wir zeichnen den Nullpunkt unseres räumlichen Koordinatensystems wie gewöhnlich in (0|0) und die Punkte (1|0|0), (0|1|0) bzw. (0|0|1) in (4|0), (2|1) bzw. in (0|4).

   (a) Stelle die Matrix M auf, für die $\vec{u} = M\vec{x}$ der Ortsvektor des Punktes ist, in dem der Raumpunkt X gezeichnet wird.

   (b) Zeichne das Bild des Würfels mit der Kantenlänge 1, dessen Raumdiagonale die Endpunkte (0|0|0) und (1|1|1) hat.

   (c) Gib eine Gerade im Raum an, die in der Zeichnung nur als Punkt erscheint.

   (d) Zwei Raumpunkte P und Q erscheinen in der Zeichnung nur als ein einziger Punkt. Was kannst du über den Vektor $\overrightarrow{PQ}$ sagen?

2. Finde die 2×2–Matrix M, die eine Drehung der Ebene um den Nullpunkt um 90° gegen den Uhrzeigersinn bewirkt. [Tipp: Du findest die Matrix mit Hilfe unseres Merkversleins.]

3. Zeichne das Haus des Nikolaus, indem du mit dem Quadrat der Kantenlänge 2 und der Diagonalen mit den Endpunkten (0|0) und (2|2) beginnst und die Spitze des Giebels in den Punkt (1|3) legst. Wende die Matrixabbildung zur Matrix
$$M = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$
auf das Haus an. Was macht die Abbildung geometrisch?

4. Finde alle Punkte der Ebene, die durch die Matrixabbildung zu
$$M = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$$
auf sich selbst abgebildet werden. [Tipp: Die Bedingung liefert ein LGS.]

5. Verwende in dieser Aufgabe Julians Koordinatensystem (siehe Seite 29).

   (a) Zeichne das Viereck $OABC$ mit den Eckpunkten $O(0|0|0)$, $A(1|1|0)$, $B(0|2|1)$ und $C(1|1|2)$ und die Diagonalen ein.

   (b) Stelle die Gleichungen der Diagonalen auf – sowohl die der Geraden im Raum als auch die in der Zeichenebene.

   (c) Berechne den Schnittpunkt der Diagonalen in der Zeichenebene.

   (d) Schneiden sich auch die Diagonalen im Raum?

3.5 Längen und rechte Winkel

Du hast schon vor langen Jahren die Länge d der Diagonalen eines Quaders ausgerechnet – eine klassische Anwendung des Pythagoras: sind a, b und c Länge, Breite und Höhe des Quaders, ist

$$d \;=\; \sqrt{a^2+b^2+c^2} \quad ,$$

eine ästhetisch sehr ansprechende Formel. Wenn du diese Formel im Hinterkopf hast, wird dir die folgende Definition sofort einleuchten:

5 Definition
Für $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ ist der **Betrag** *des Vektors $\vec{x}$*

$$|\,\vec{x}\,| \;:=\; \sqrt{x_1^2+x_2^2+\ldots+x_n^2} \;=\; \sqrt{\sum_{k=1}^{n} x_k^2} \quad .$$

Für $n=2$ und $n=3$ ist $|\vec{x}|$ gerade die Länge des Pfeils, der vom Nullpunkt O zum Punkt X führt, und für Punkte P, Q des Raumes oder der Ebene ist

$$|\overrightarrow{PQ}| \;=\; |\vec{q}-\vec{p}|$$

gerade die Länge der Strecke $\overline{PQ}$.

Um zu rechten Winkeln zu kommen, machen wir Folgendes. Wir nehmen zwei Vektoren $\vec{a}, \vec{b} \in \mathbb{R}^3$ und fragen, wann die Pfeile dazu bei O einen rechten Winkel bilden. Das ist offensichtlich der Fall, wenn das Dreieck OAB bei O einen rechten Winkel hat, und das stimmt genau dann, wenn für die Seitenlängen des Dreiecks der Pythagoras stimmt. Dann soll also diese Gleichung erfüllt sein:

$$|\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2 \;=\; |\vec{b}-\vec{a}|^2$$

Wir schreiben das aus:

$$a_1^2+a_2^2+a_3^2+b_1^2+b_2^2+b_3^2 \;=\; (b_1-a_1)^2+(b_2-a_2)^2+(b_3-a_3)^2$$

Sicher hat man dir seinerzeit eingeschärft, dass du die binomischen Formeln gut können musst, weil die immer wieder vorkommen, und das stimmt tatsächlich. Wenn du die Klammern auf der rechten Seite auflöst und die Gleichung sinnvoll vereinfachst, erhältst du

$$0 \;=\; -2a_1b_1-2a_2b_2-2a_3b_3 \quad ,$$

und das dividiert jeder, der auch nur ein wenig Gefühl hat, sofort durch -2. Ergebnis: Die Pfeile zu $\vec{a}$ und $\vec{b}$ bilden bei O einen rechten Winkel genau dann, wenn

$$a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3 \;=\; 0$$

ist. Ein schönes Resultat, und das führt auch gleich wieder zu Begriffsbildungen in der abstrakten Linearen Algera:

6 Definition
Für $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^n$ definiert man das **Skalarprodukt** *$\vec{x}*\vec{y}$ durch*

$$\vec{x}*\vec{y} \;:=\; x_1y_1+x_2y_2+\ldots+x_ny_n \;=\; \sum_{k=1}^{n} x_ky_k \quad ,$$

und man nennt $\vec{x}$ und $\vec{y}$ **orthogonal** *genau dann, wenn $\vec{x}*\vec{y}=0$ ist. In Zeichen:*

$$\vec{x}\perp\vec{y} \quad :\Leftrightarrow \quad \vec{x}*\vec{y}=0 \quad .$$

Anmerkungen. Die Definition hat zur Folge, dass der Nullvektor $\vec{0}$ zu jedem $\vec{x}$ orthogonal ist, und wenn du mit dem Skalarprodukt rechte Winkel im Raum aufspüren willst, musst du immer gut aufpassen, dass die Pfeile zu deinen Vektoren denselben Anfangspunkt haben.

3.6 Rechenregeln für das Skalarprodukt

So eine neue Rechenart ist immer ein gefundenes Fressen; es wird genauestens untersucht, welche Gesetzmäßigkeiten für die Rechenart gelten. Nun haben wir uns das Skalarprodukt ja nicht ausgedacht, sondern dieses vorgefunden, und wir können davon ausgehen, dass es sich wie ein Produkt benimmt, wenn die Altvorderen es so genannt haben. Das stimmt auch – weitgehend. Es gelten die folgenden Rechenregeln:

7 Lemma
Für alle $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z} \in \mathbb{R}^n$ und für alle $r \in \mathbb{R}$ gilt

$$\begin{aligned} \vec{x} * \vec{y} &= \vec{y} * \vec{x} \\ \vec{x} * (\vec{y} + \vec{z}) &= \vec{x} * \vec{y} + \vec{x} * \vec{z} \\ (r\vec{x}) * \vec{y} &= r(\vec{x} * \vec{y}) \quad . \end{aligned}$$

Beweis: Man schreibt einfach aus, was da steht. Das kannst du ja mal für $n = 2$ durchführen.

Anmerkung. Gib Acht, ein Assoziativgesetz gibt es **nicht**: $\vec{x} * \vec{y}$ ist eine Zahl und kein Vektor, du kannst also einen Ausdruck wie $(\vec{x} * \vec{y}) * \vec{z}$ gar nicht bilden.

Technische Übungen

1. Beweise die Gültigkeit der Regel $\vec{x} * \vec{y} = \vec{y} * \vec{x}$ für alle $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^n$ (notfalls für $n = 2$).

2. Zeige: Wenn $\vec{v} * \vec{w} = 0$ ist, dann ist auch $\vec{v} * (r\vec{w}) = 0$ für alle $r \in \mathbb{R}$. Was heißt das geometrisch im Fall $n = 3$?

3. Zeige: Aus $\vec{n} * \vec{a} = 0$ und $\vec{n} * \vec{b} = 0$ folgt $\vec{n} * (r\vec{a} + s\vec{b}) = 0$ für alle $r, s \in \mathbb{R}$. Was heißt das geometrisch im Fall $n = 3$? [Anmerkung: Die Bezeichnungen sind hier ein wenig unglücklich. Die Dimension n des Raumes hat mit dem n im Namen des Vektors nichts zu tun.]

4. Die Gleichung
$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} * \vec{x} = 0$$
ist, bei Licht besehen, ein LGS. Gib die Größe an, berechne die Lösungsmenge und deute Gleichung und Lösungsmenge geometrisch.

5. Bestimme $a \in \mathbb{R}$ so, dass
$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \\ a \end{pmatrix} = 0$$
ist, und deute Aufgabenstellung und Ergebnis geometrisch.

6. Zeichne das Dreieck aus $A(2|2|-3)$, $B(-2|1|-1)$ und $C(-1|3|2)$ und prüfe, ob es rechtwinklig ist.

3.7 Zum Wesen von Matrixabbildungen

Wir wollen eine Matrixabbildung auf das Haus des Nikolaus wirken lassen. Als Matrix nehmen wir

$$M := \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \quad .$$

Wie gehen wir vor? Erstens lässt jede Matrixabbildung den Nullpunkt fest: $M\vec{0} = \vec{0}$. Die untere linke Ecke bleibt also schon einmal liegen. Ich gehe nun vor wie Sjard an der Tafel und rechne die Bildpunkte der Ecken der rechten Hauswand aus:

$$M \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad M \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \end{pmatrix} \quad .$$

Nun zeichnen wir das Bild des Bodens, dazu verbinden wir einfach die Bildpunkte $(0|0)$ und $(-2|2)$ der Enden des Bodens. Das Bild der rechten Hauswand ist die Verbindungsstrecke der Bildpunkte der Enden, und das ist die Strecke mit den Endpunkten $(-2|2)$ und $(-4|0)$.

Dass wir das so machen dürfen, liegt an den Gesetzen der Matrix–Vektor–Multiplikation, die ich euch auf Seite 21 notiert habe. Sie sind längst nicht so selbstverständlich, wie du vielleicht denkst. Schau dir dieses **Beispiel** an: Durch

$$F : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x \\ \frac{1}{3}x^2 y \end{pmatrix}$$

ist eine Abbildung F gegeben, die jedem Punkt der Ebene einen Bildpunkt zuordnet. Natürlich kannst du die Bildpunkte der Punkte ausrechnen, die das Haus festlegen, aber die Bilder der Verbindungsstrecken sind keineswegs immer Strecken, und wenn sie es sind, sind in der Regel die Skalen verzerrt. Abbbildung 13 zeigt das Bild des Hauses des Nikolaus unter der Abbildung F. Es ist noch relativ harmlos, weil F stetig ist: Bilder durchgezogener Linien sind durchgezogene Linien.

Aufgabe. Rechne ein paar Bildpunkte selbst nach. Finde insbesondere drei Punkte, die auf einer Geraden liegen, deren Bildpunkte aber nicht.

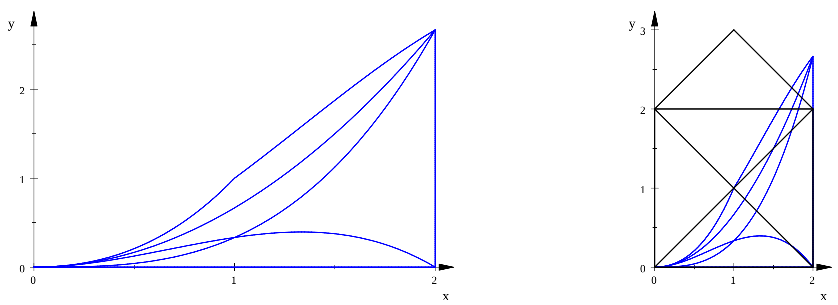


Abbildung 13: Bild des Hauses des Nikolaus unter F, mit und ohne Urbild

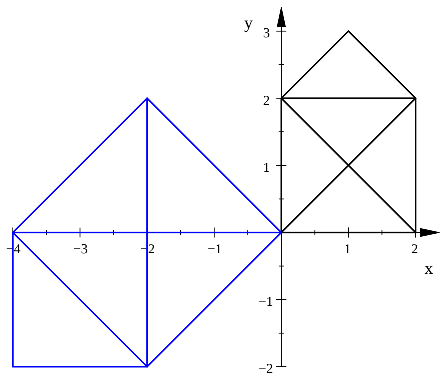


Abbildung 14: Bild des Hauses des Nikolaus unter $\vec{x} \mapsto M\vec{x}$

Schauen wir uns nun an, was unsere Matrixabbildung $\vec{x} \mapsto M\vec{x}$ aus dem Haus macht (Abbildung 14)

Die Form ist geblieben. Die beiden Einheitsvektoren wurden, wie es aussieht, gedreht und gestreckt. Dass das stimmt, kann man elementargeometrisch nachprüfen. Dann aber weiß man, dass die ganze Ebene gedreht und gestreckt wurde: Die Bilder der Einheitsvektoren[10] legen schon alles fest. Das liegt daran, dass das Bild einer Linearkombination der Einheitsvektoren die entsprechende Linearkombination der Bilder der Einheitsvektoren – also der Spaltenvektoren der Matrix – ist. Das Merkverslein spricht genau das aus, auf das es ankommt!

[10] Und diese Bilder kann man im Bildraum ganz beliebig aussuchen!

3.8 Ebenen im Raum

3.8.1 Ebenen durch den Nullpunkt

Es sei $\vec{n} \in \mathbb{R}^3$, $\vec{n} \neq \vec{0}$. Wir fragen nach der Lösungsmenge der Gleichung

$$\vec{n} * \vec{x} \;=\; 0 \quad . \tag{15}$$

Stellen wir uns unter $\vec{n}$ den Pfeil $\overrightarrow{ON}$ vom Nullpunkt zum Punkt N vor, dann ist nach allen Pfeilen $\overrightarrow{OX}$ gefragt, die im Nullpunkt beginnen und dort mit dem Pfeil zu $\vec{n}$ einen rechten Winkel bilden. Alle diese Pfeile liegen in einer Ebene durch den Nullpunkt, auf der der $\vec{n}$–Pfeil im Nullpunkt senkrecht steht. Die Ebene besteht genau aus den Punkten X zu diesen (Orts)vektoren $\vec{x}$. Ich veranschauliche die Situation gern durch eine Skizze wie in Abbildung 15; sie erinnert an eine Reißzwecke, und das passt ganz gut. Der Vektor $\vec{n}$ heißt übrigens ein **Normalenvektor** der Ebene.

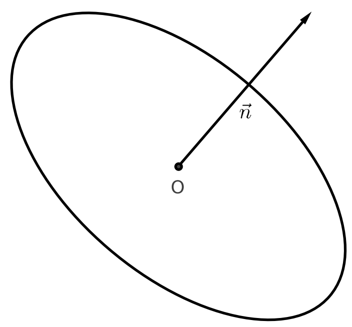


Abbildung 15: Darstellung einer Ebene im Raum durch O mit Normalenvektor $\vec{n}$

Bestimmen wir nun die Lösungsmenge rechnerisch. In Gleichung (15) steht, bei Licht besehen, ein 1×3–LGS, und zwar

$$\begin{array}{ccc|c} n_1 & n_2 & n_3 & 0 \end{array} \quad .$$

Da $\vec{n} \neq \vec{0}$ ist, ist mindestens eines der n_k von Null verschieden. Der Einfachheit halber nehmen wir an, dass $n_1 \neq 0$ ist. Dann sind x_2 und x_3 frei wählbar. Setzen wir $x_2 = s$ und $x_3 = t$, erhalten wir

$$x_1 \;=\; -\frac{n_2}{n_1}s - \frac{n_3}{n_1}t \quad ,$$

also

$$\mathbb{L} \;=\; \left\{ \begin{pmatrix} -\frac{n_2}{n_1}s - \frac{n_3}{n_1}t \\ s \\ t \end{pmatrix} \,\middle|\, s,t \in \mathbb{R} \right\} \;=\; \left\{ s\begin{pmatrix} -\frac{n_2}{n_1} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} -\frac{n_3}{n_1} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \,\middle|\, s,t \in \mathbb{R} \right\} \quad ,$$

und das ist die Menge aller Linearkombinationen zweier Vektoren des $\mathbb{R}^3$. In geometrischer Sprache ist das eine Ebene durch den Nullpunkt, die von zwei Pfeilen aufgespannt wird.[11] – Du solltest die Sache unbedingt mit einem konkreten $\vec{n}$ durchbuchstabieren.

[11] Hier greift der Sjardsche Vorbehalt: diese Pfeile dürfen nicht in die gleiche Richtung zeigen, und das tun sie hier nicht, wie du an den Einträgen 2 und 3 siehst.

3.8.2 Ebene durch drei Raumpunkte

Es seien drei Raumpunkte A, B und C gegeben, die nicht auf einer Geraden liegen. Wir interessieren uns für die Ebene E durch die drei Punkte. Ich sage „die“ Ebene, weil sie eindeutig bestimmt ist, jedenfalls nach unserer Erfahrung im Anschauungsraum.

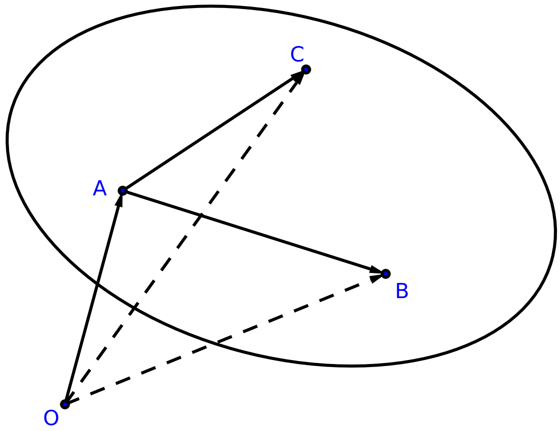


Abbildung 16: Ebene E durch drei Punkte A, B und C

Wenn du ein wenig über Abbildung 16 meditierst, wirst du es eine gute Idee finden, den Vektor

$$\vec{x}(s,t) = \vec{a} + s\overrightarrow{AB} + t\overrightarrow{AC} \tag{16}$$

als den Ortsvektor eines allgemeinen Punktes der Ebene anzusehen. An der gewundenen Ausdrucksweise merkst du schon, dass wieder Pudding an die Wand genagelt wird. Auf sicherem Grund formuliert man so:

8 Definition
Es seien $\vec{a}$, $\vec{v}$, $\vec{w} \in \mathbb{R}^3$, und $\vec{v}$ und $\vec{w}$ seien nicht Vielfache von einander. Dann nennen wir die durch

$$\left\{ \vec{a} + s\vec{v} + t\vec{w} \;\middle|\; s,t \in \mathbb{R} \right\}$$

gegebene Punktmenge die Ebene durch die Punkte zu $\vec{a}$, $\vec{a}+\vec{v}$ und $\vec{a}+\vec{w}$.

Wenn dir diese Betrachtung nicht behagt, kannst du sie getrost außen vor lassen. Wichtig ist, dass du die Konstruktion in Gleichung (16) handhaben kannst und dass du damit vertraut bist, dass es sich um die Ebene durch A, B und C handelt[12], genauer, um eine Parameterdarstellung dieser Ebene.

Dass du diese Parameterdarstellung zur Hand hast, ist für dein Verständnis unabdingbar, aber sie ist für die Alltagsarbeit alles andere als praktisch. Ich zeige dir das an ein paar Grundaufgaben:

1. Liegt ein vorgegebener Punkt P auf E? Der Ansatz ist nicht schwer:

   $$\vec{x}(s,t) = \vec{p}$$

   – das ist ein 3×2–LGS für s und t. Klar? Sonst überlege dir, dass genau die Punkte zu E gehören, die sich in der Form in Gleichung (16) darstellen lassen, und du musst schauen, ob das bei dem vorgelegten P möglich ist.

[12] Hüte dich vor dem Fehler, hier $\vec{x}(s,t) = \vec{a} + s\vec{b} + t\vec{c}$ zu bilden; das ist eine ganz andere Ebene.

2. Bestimme den Schnittpunkt der Ebene E mit der Geraden g durch zwei Punkte P und Q. Im Prinzip auch nicht schwer. Ansatz:

$$\vec{x}(s,t) \;=\; \vec{p} + r\overrightarrow{PQ}$$

Das ist ein 3×3–LGS für r, s und t. Und wenn du es gelöst hast, darfst du die drei Zahlen nicht in einen Vektor schreiben, sondern du musst die Werte von s und t in $\vec{x}(s,t)$ einsetzen oder den für r in die Parameterdarstellung der Geraden. Es muss jeweils derselbe Vektor herauskommen, sonst hast du dich verrechnet.

3. Bestimme die Schnittmenge der Ebene E mit der Ebene

$$E' : \vec{x}(s,t) = \vec{a}\,' + s\vec{v}\,' + t\vec{w}\,' \quad .$$

Hier führt der Lösungsansatz auf ein 3×4–LGS, und aus dessen Lösungsmenge musst du die Vektoren der Schnittmenge erst noch konstruieren. Mein dringender Rat: Lass das bloß sein.

Im Unterricht haben wir uns überlegt, welche Form die mit Gauß bearbeiteten LGS in den drei Fällen haben, wenn bestimmte geometrische Konstellationen vorliegen, etwa $E \parallel E'$, und das ist eine nützliche und lehrreiche Übung. Zum Rechnen allerdings benutzt du auf jeden Fall eine Normalengleichung der Ebene, mit der du zu tun hast, und was das ist, siehst du gleich.

3.8.3 Normalengleichung einer Ebene

Es sei $\vec{n} \in \mathbb{R}^3$, $\vec{n} \neq \vec{0}$, und $d \in \mathbb{R}$. Wir fragen nach der Lösungsmenge der Gleichung

$$\vec{n} * \vec{x} \;=\; d \quad .$$

Das ist ein harmloses 1×3–LGS. Ihr hattet euch die Rechnung für ein konkretes

$$\vec{n} \;=\; \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} \quad \text{und ein konkretes } d = 4$$

gewünscht, und so soll es geschehen. Wir haben es also mit

$$\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & 4 \end{array}$$

zu tun. Zwei Variable sind frei wählbar. Fange immer hinten an! Wir setzen $x_3 = t$ und $x_2 = s$. Dann ist

$$x_1 \;=\; 4 - 2s + 3t \quad ,$$

und wir erhalten

$$\mathbb{L} \;=\; \left\{ \begin{pmatrix} 4 - 2s + 3t \\ s \\ t \end{pmatrix} \;\middle|\; s, t \in \mathbb{R} \right\} \quad .$$

Wir schreiben den Vektor noch ein wenig um:

$$\mathbb{L} \;=\; \left\{ \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \;\middle|\; s, t \in \mathbb{R} \right\}$$

und siehe da – vor uns steht eine Parameterdarstellung einer Ebene. Wir müssen nur noch klären, welche konkrete Bedeutung $\vec{n}$ und d für die Ebene haben. Um dies herauszufinden, schauen wir noch einmal auf unseren Ansatz. Wir wollten die Gleichung $\vec{n} * \vec{x} = d$ lösen, und dies haben wir für ein konkretes $\vec{n}$ und ein konkretes d durchgeführt. Also ist $\vec{n} * \vec{x}$ immer diese Zahl d, für jedes beliebige $\vec{x} \in \mathbb{L}$. Im konkreten Fall heißt das, dass

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} * \left(\begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right) \;=\; 4 \quad \text{ist für alle } s, t \in \mathbb{R}.$$

Nach unseren Rechenregeln für das Skalarprodukt dürfen wir die Klammer auflösen und die Faktoren s, t aus den Produkten herausziehen. Das machen wir aber nicht für die Dreierspalten, dann sieht man nicht mehr viel, sondern wir schreiben die Gleichung mit Variablen, dann sieht alles viel freundlicher aus: Ist

$$\mathbb{L} = \{ \vec{a} + s\vec{v} + t\vec{w} \,|\, s, t \in \mathbb{R} \} \quad ,$$

hat die erste Gleichung die Form

$$\vec{n} * (\vec{a} + s\vec{v} + t\vec{w}) \;=\; d \quad ,$$

und dies formen wir um zu

$$\vec{n} * \vec{a} + s(\vec{n} * \vec{v}) + t(\vec{n} * \vec{w}) \;=\; d \quad \text{für alle } s, t, \in \mathbb{R}.$$

Da steht, man darf die Werte von s und t beliebig verändern, und zwar unabhängig von einander, ohne dass das irgendwelchen Einfluss auf den Wert der Summe hätte. Das geht dann, wenn

$$\vec{n} * \vec{v} \;=\; 0 \quad \text{und} \quad \vec{n} * \vec{w} \;=\; 0$$

ist, und sonst nicht. In der Tat ist das bei den konkreten Werten auch der Fall, rechne es nach.

Nun müssen wir den Sack nur noch zubinden. Die Vektoren $\vec{v}$ und $\vec{w}$ erzeugen eine Ebene E_0 durch den Nullpunkt, der Vektor $\vec{n}$ steht auf dieser Ebene senkrecht, ist also ein Normalenvektor dieser Ebene E_0. Die Gleichung $\vec{n} * \vec{x} = d$ ist die Gleichung einer Ebene E, die parallel ist zu E_0; man erhält sie, indem man E_0 um einen Vektor $\vec{a}$ verschiebt.

Die Normalengleichung einer Ebene ist ein wundervolles Werkzeug, alle möglichen Fragestellungen zu Ebenen schnell und ökonomisch zu behandeln. Jetzt vor der Klausur lernst du aber nur noch, wie man eine Normalengleichung der Ebene gewinnt, die durch drei Raumpunkte A, B und C geht (die natürlich nicht auf einer Geraden liegen dürfen, sonst reklamiert Sjard). Ein Normalenvektor muss auf der Ebene senkrecht stehen – du musst ihn dir als Pfeil auf der Ebene vorstellen! Die rechnerische Bedingung dafür ist

$$\vec{n} * \overrightarrow{AB} \;=\; 0 \quad \text{und} \quad \vec{n} * \overrightarrow{AC} \;=\; 0 \quad , \tag{17}$$

und das ist ein 2×3–LGS für die Einträge von $\vec{n}$.

Beispiel: Bestimme eine Normalengleichung der Ebene durch die drei Punkte $S(6|6|5)$, $S_2(10|0|\frac{5}{2})$ und $B(8|8|0)$ – das die Ebene aus der Aufgabe 51 im grünen Buch, Seite 69, die Timon benutzt hatte. Wir bestimmen die (Richtungs–)vektoren

$$\overrightarrow{SS_2} \;=\; \begin{pmatrix} 4 \\ -6 \\ -\frac{5}{2} \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \overrightarrow{SB} \;=\; \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -5 \end{pmatrix}$$

und erhalten aus $\vec{n} * \overrightarrow{SS_2} = 0$ und $\vec{n} * \overrightarrow{SB} = 0$ das LGS

$$\begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & -5 & 0 \\ 4 & -6 & -\frac{5}{2} & 0 \end{array} \quad .$$

Dieses bearbeiten wir wie üblich zu

$$\begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & -5 & 0 \\ 0 & -10 & \frac{15}{2} & 0 \end{array} \quad .$$

Die Lösungsmenge besteht aus allen Vielfachen eines Vektors. Die brauchen wir nicht alle, uns reicht ein konkreter Vektor, der möglichst bequem sein soll. Also wählen wir zum Beispiel $n_3 = 4$, dann wird $n_2 = 3$ und schließlich $n_1 = 7$:

$$\vec{n} \;=\; \begin{pmatrix} 7 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

So, einen Normalenvektor haben wir. Wie bekommen wir die rechte Seite d? Nun, $\vec{n} * \vec{x}$ muss für jeden Punkt X der Ebene denselben Wert liefern. In der Tat ist

$$\vec{n} * \vec{s} \;=\; \vec{n} * \vec{s}_2 \;=\; \vec{n} * \vec{b} \;=\; 80 \quad ,$$

die Ebene hat die Gleichung

$$7x_1 + 3x_2 + 4x_3 \;=\; 80 \quad .$$

Mit der Gleichung hast du ein äußerst bequemes Hilfsmittel zur Hand, um etwa zu prüfen, ob ein Punkt P auf der Ebene liegt: Du bildest $\vec{n} * \vec{p}$ und schaust, ob 80 herauskommt. Das ist schneller gemacht als ein 2×3–LGS zu lösen. Weitere Anwendungen gibt es nach der Klausur.

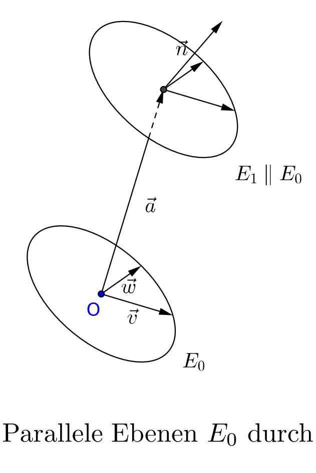


Abbildung 17: Parallele Ebenen E_0 durch O und E durch A

3.8.4 Zu Aufgabe 5 auf Seite 30

Was die alte Aufgabe in dem neuen Kapitel über Ebenen zu suchen hat, wirst du bald sehen. Zunächst war das Bild eines räumlichen Vierecks in Julians System zu zeichnen:

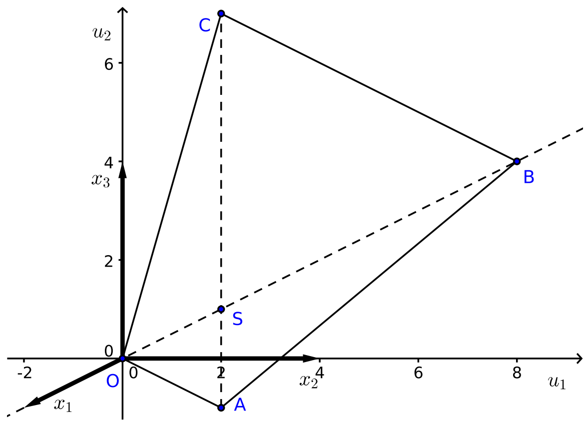


Abbildung 18: Bild des Vierecks in Julians System

Den Schnittpunkt S der Diagonalen in der Zeichnung findet man leicht, das ist $(2|1)$. Wie sieht es mit dem Schnittpunkt der Diagonalen des räumlichen Vierecks aus? Wir stellen Geradengleichungen auf

$$OB: \ \vec{x}(t) \ = \ t\vec{b} \ = \ t\begin{pmatrix}0\\2\\1\end{pmatrix} \quad , \quad AC: \ \vec{y}(s) \ = \ \vec{a} + s\overrightarrow{AC} \ = \ \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} + s\begin{pmatrix}0\\0\\2\end{pmatrix}$$

und setzen die allgemeinen Vektoren gleich. Das führt von $t\vec{b} = \vec{a} + s\overrightarrow{AC}$ über $t\vec{b} - s\overrightarrow{AC} = \vec{a}$ zu folgendem LGS:

$$\begin{array}{cc|c} 0 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \end{array}$$

Schon die erste Zeile zeigt, dass das LGS keine Lösung hat, die Geraden schneiden sich nicht.

Wie kann das sein? Offensichtlich liegen nicht alle vier Punkte in einer Ebene, also zum Beispiel der Punkt B nicht in der Ebene durch O, A und C.

Erstaunlicherweise ist es möglich, zum Raumpunkt B einen neuen Raumpunkt B' zu finden, so dass das Viereck in Julians Zeichnung unverändert bleibt, aber sich die Diagonalen im Raum schneiden. Und das geht so:

1. Die Raumpunkte, die in Julians Zeichnung wie B im Punkt $(8|4)$ eingezeichnet werden, bilden eine Gerade durch B im Raum. Diese Gerade bekommt man als Lösungsmenge des LGS

$$\begin{pmatrix}-2 & 4 & 0\\ -1 & 0 & 4\end{pmatrix}\vec{x} \ = \ \begin{pmatrix}8\\4\end{pmatrix} \quad .$$

2. Man beschreibt die Ebene durch O, A und C algebraisch
3. und berechnet den Vektor, der zu beiden Gebilden gehört.

3.9 Zwischen Klausur und Prag

machen wir am besten eine kombinierte Übungs–und Forschungsstunde. Hier sind eine Reihe von Arbeitsaufträgen für euch.

1. **Ebenen und Geraden konkret**

   (a) Stelle zu der Ebene E durch die Punkte $A(1|2|5)$, $B(2|2|2)$ und $C(-3|4|1)$ eine Parameterform und eine Normalengleichung auf und untersuche, ob der Punkt $P(110|213|-125)$ in E liegt.

   (b) Ich verwende die Ortsvektoren der Punkte A und B der vorigen Teilaufgabe als Normalenvektoren von Ebenen $E_1: \ \vec{a} * \vec{x} = 5$ und $E_2: \ \vec{b} * \vec{x} = -1$. Stelle zu der Ebene E_1 eine Parametergleichung auf und berechne die Schnittmenge der Ebenen.

   (c) In der Bauer–Mecke–Aufgabe der Klausur war das Bild der Lösungsmenge ja ein Punkt. Repariere die Aufgabe, indem du andere Vorgaben für die Bilder der Einheitsvektoren des räumlichen Koordinatensystems im Kästchensystem machst. Der Rest der Aufgabe soll unverändert bleiben.

2. **Allgemeine Fragestellungen**

   (a) Berechne allgemein den Schnittpunkt der Ebene $E: \ \vec{n} * \vec{x} = d$ mit der Geraden $g: \ \vec{x}(t) = \vec{a} + t\vec{v}$. [Das geht leichter, als du denkst. Du musst ja nur den t–Wert des Schnittpunktes suchen. Achte auf Sonderfälle! Und wenn du die allgemeine Aufgabenstellung nicht magst, machst du dir halt selbst eine konkrete.]

   (b) Berechne den Abstand des Nullpunktes von der Ebene $E: \ \vec{n} * \vec{x} = d$.

   (c) Wie sieht man, ob zwei Ebenen parallel sind?

3. **Stimmt's?**

   (a) Hier siehst du das Bild eines Würfels. Die Mittelpunkte einiger Kanten sind zu einem Sechseck verbunden. Ist das ein ebenes Sechseck, gar ein regelmäßiges?

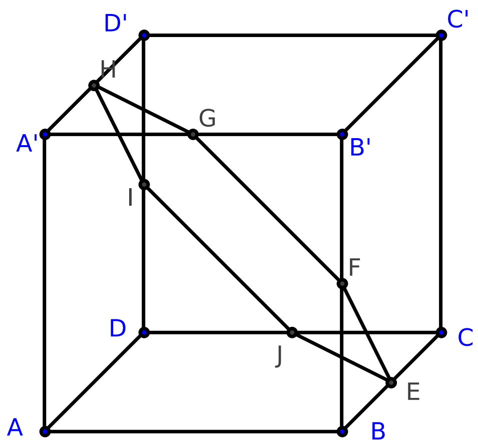


Abbildung 19: Sechseck im Würfel

(b) In Abbildung 20 auf Seite 42 siehst du eine Sammlung von Bildern räumlicher Vierecke. Zu jedem Viereck ist das von den Seitenmittelpunkten gebildete Viereck eingezeichnet, und die gezeichneten Exemplare scheinen regelmäßig zu sein. Stelle Vermutungen an und prüfe sie.

(c) Bastele ein räumliches Viereck, dessen ebenes Bild wie ein Parallelogramm aussieht, dessen Punkte aber nicht einmal in einer Ebene liegen – wenn es so etwas gibt. [Tipp: Beginne mit der Wahl der Bildpunkte der Einheitsvektoren im Kästchensystem]

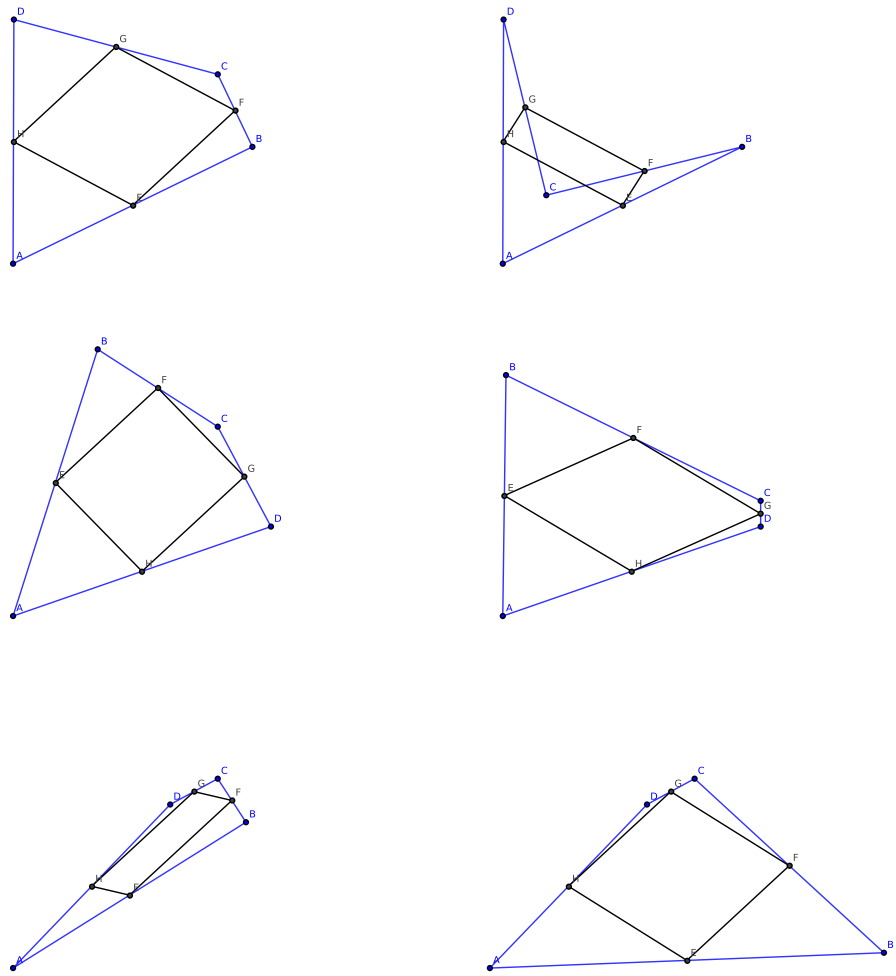


Abbildung 20: Ein paar räumliche Vierecke mit ihren Mittenvierecken

4 Klausur Nr. 5 am 21. September 2015

1. **Gleichungen und Gleichungssysteme**

   (a) Löse das LGS nach Gauß. [6]

   $$\begin{aligned} x_1 - 2x_2 &= 5 \\ -2x_1 + 4x_2 &= -10 \end{aligned}$$

   (b) Notiere die Größe des LGS und bestimme die Lösungsmenge. [Gauß war offensichtlich schon da] [8]

   $$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 0 \end{array}\right)$$

   (c) Jens brütet über einem 2×3–LGS $A\vec{x} = \vec{0}$. Bei seinem ersten Lösungsversuch war die Lösungsmenge leer, beim zweiten hatte sie genau drei Elemente. Was sagst du dazu? [6+]

   (d) Gesucht ist eine Parabel. Sie schneidet die x–Achse bei $x = 1$, ihr Scheitelpunkt liegt auf der y–Achse, und der Inhalt der Fläche unter der Kurve zwischen $x = 0$ und $x = 1$ ist 2. Bestimme den Term der Parabel. [15]

   (e) Rechne nach, dass $y = 5e^{-x^2}$ Lösung der Differentialgleichung $y' = -2xy$ ist. [8]

   (f) Die Molkerei des Bauern Mecke hat Milch mit 0.5%, mit 2% und mit 3.5% Fettgehalt vorrätig. Ein Kunde wünscht Milch mit 2.3% Fettgehalt.

      i. Der Betriebsleiter will die Anzahlen x_1, x_2, x_3 von Litern der jeweiligen Sorten zu **fünf** Litern der gewünschten Mischung zusammenkippen. Stelle ein LGS auf, löse es aber **nicht**. [6]

      ii. Die Lösungsmenge ist

      $$\mathbb{L} = \left\{ \begin{pmatrix} -1+t \\ 6-2t \\ t \end{pmatrix} \middle| \, t \in \mathbb{R} \right\} .$$

      Stelle die Lösungsmenge in einem Koordinatensystem dar [räumliche Einheitsvektoren im Kästchensystem bei (2|0), (2|1), (0|2)] und kennzeichne den Teilbereich der Lösungen, deren Einträge sämtlich ≥ 0 sind – nur die sind ja im Kontext brauchbar. [Tipp: bestimme den Bereich der t, die solche brauchbaren Lösungen liefern] [18]

      iii. Wie sollte man mischen, wenn möglichst viel Milch zu 3.5% Fett verwandt werden soll? [4]

2. **Matrizen und Abbildungen**

(a) Manche zeichnen ein räumliches Koordinatensystem so, dass die räumlichen Einheitsvektoren im Kästchensystem bei $(-4|-4)$, $(4|-4)$ und $(0|4)$ gezeichnet werden. Zeichne ein solches System, zeichne unseren Einheitswürfel [mit der Raumdiagonalen $(0|0|0)$ und $(1|1|1)$] ein und gib die Matrix M an, die Vektoren aus dem $\mathbb{R}^3$ in die Bildvektoren im Kästchensystem umrechnet. [8]

(b) Die Spiegelung der Ebene an der Geraden $y = -x$ lässt sich als Matrixabbildung schreiben. Notiere die Abbildungsmatrix! [8]

(c) Es sei

$$M = \begin{pmatrix} \frac{3}{5} & \frac{4}{5} \\ \frac{4}{5} & -\frac{3}{5} \end{pmatrix} \quad , \quad \vec{a} = \begin{pmatrix} 10 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 10 \\ 5 \end{pmatrix} \quad .$$

i. Zeichne das Dreieck OAB und das Bilddreieck unter der Abbildung $\vec{x} \mapsto M\vec{x}$. [8]

ii. Finde einen Ansatz für die Vektoren $\vec{x}$, die unter $\vec{x} \mapsto M\vec{x}$ auf ihren Gegenvektor $-\vec{x}$ abgebildet werden. Du solltest ein LGS erhalten. Schreibe es in Standardform hin, löse es aber nicht. [6]

3. **Raumgeometrie**

Gegeben sind die Raumpunkte $A(3|2|4)$, $B(5|3|5)$ und $C(4|1|3)$. Zeichne zu dieser Aufgabe eine brauchbare Handskizze, du brauchst aber nicht Kästchen zu zählen.

(a) Ist das Dreieck ABC rechtwinklig? [10]

(b) Berechne den Schwerpunkt S des Dreiecks ABC. [6]

(c) Schreibe eine Parameterdarstellung der Parallelen zu AB durch C hin. [6]

(d) Gib eine Parameterdarstellung und eine Normalengleichung der Ebene E durch A, B und C an. [18]

(e) Welchen Schattenpunkt auf der yz–Ebene wirft der Punkt A, wenn die Richtung der Sonnenstrahlen durch

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

gegeben ist? [12]

5 Raumgeometrie: Abstände und Winkel

5.1 Kleiner Rückblick

Wo stehen wir? Lies dir das Folgende aufmerksam durch, und wenn dir etwas davon nicht völlig klar ist, herrscht akuter Handlungsbedarf.

1. Du kennst und beherrschst dein Werkzeug aus der **Linearen Algebra**: du kannst Spaltenvektoren des $\mathbb{R}^n$ addieren und mit Zahlen multiplizieren, du bist perfekt im Umgang mit LGS [Vektor–Matrix–Schreibweise, Gaußscher Algorithmus, Aussehen der möglichen Lösungsmengen als Teilmengen des $\mathbb{R}^n$], du weißt etwas über Matrixabbildungen und du kennst das Skalarprodukt und seine Regeln.

2. Du weißt, wie man Vektoren des $\mathbb{R}^3$ [und des $\mathbb{R}^2$] und gewisse Mengen solcher Vektoren verwendet, um geometrische Objekte der Ebene und des Raumes zu beschreiben: Zum Vektor $\vec{a}$ gehört ein Punkt A oder eine Verschiebung, zu Mengen der Form

$$\{\, \vec{a} + t\vec{v} \,|\, t \in \mathbb{R} \,\} \qquad \text{bzw.} \qquad \{\, \vec{a} + r\vec{v} + s\vec{w} \,|\, r, s \in \mathbb{R} \,\} \ ,$$

die dir schon als Lösungsmengen von LGS begegnet sind, gehören, falls $\vec{v} \neq \vec{0}$ ist, Geraden bzw., wenn $\vec{v}$ und $\vec{w}$ nicht Vielfache von einander sind, Ebenen. Du kannst vorgegebene geometrische Objekte in dieser Form darstellen. Du kannst ebene Zeichnungen eines räumlichen Koordinatensystems erstellen und du weißt, dass die Vektoren in der Zeichenebene Bildvektoren der $\mathbb{R}^3$–Vektoren unter einer Matrixabbildung sind, deren Matrix du auch aufstellen kannst.

3. Du weißt, wie man Parallelität geometrischer Objekte mit Linearer Algebra präzise ausdrückt.

4. Du weißt, wie man mit Hilfe des Skalarprodukts die Orthogonalität zweier Vektoren $\vec{x}, \vec{y}$ und den Betrag $|\vec{x}|$ eines Vektors definiert:

$$\vec{x} \perp \vec{y} \ \Leftrightarrow \ \vec{x} * \vec{y} = 0 \ , \qquad |\vec{x}| = \sqrt{\vec{x} * \vec{x}}$$

und du weißt, wie man damit die Länge einer Strecke ausrechnet und prüft, ob Strecken $\overline{AB}$ und $\overline{AC}$ bei A einen rechten Winkel bilden.

5. Du kannst die Ebene E durch drei Raumpunkte A, B, C, die nicht auf einer Geraden liegen, sowohl in der Parameterform

$$E: \ \vec{x}(r, s) \ = \ \vec{a} + r\overrightarrow{AB} + s\overrightarrow{AC}$$

als auch in Normalenform, nämlich als Lösungsmenge einer Gleichung

$$\vec{n} * \vec{x} \ = \ d \ ,$$

schreiben. Du weißt um die geometrische Interpretation des Normalenvektors $\vec{n}$, du kannst einen solchen mit Hilfe des Skalarprodukts aus den Punkten berechnen und du weißt vor allem, dass du bei Schnittaufgaben, in denen Ebenen vorkommen, praktisch immer mit der Normalenform arbeitest und praktisch nie mit der Parameterdarstellung.

Das ist schon eine ansehnliche Liste, und das muss auch so sein, du bist ja schließlich im Mathe–Lk. Neu kommen jetzt Abstandsaufgaben und Winkel, und dann müssen wir das Ganze etwas einüben.

5.2 Der Abstand eines Punktes von einer Geraden

Wir stellen uns die folgende **Aufgabe:** Gegeben seien ein Punkt P und eine Gerade g, gesucht ist der Abstand des Punktes von der Geraden (siehe Abbildung 21).

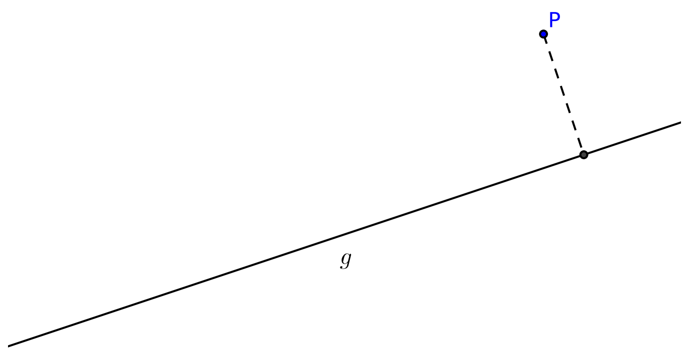


Abbildung 21: Abstand Punkt/Gerade

Das ist ein anschaulich formuliertes technisches Problem, das man immer wieder lösen muss, wenn man anwendungsnahe Aufgaben rechnet. Du kannst das Problem auch mit deinen Mitteln lösen, indem du daraus eine Aufgabe machst, eine Gerade mit einer Ebene zu schneiden oder indem du eine Extremwertaufgabe daraus machst. Das machen wir auch. Ich will dich heute aber einen anderen Weg führen und dir ein neues Hilfsmittel an die Hand geben, das verblüffend wirkungsvoll ist. Dazu formuliere ich die Aufgabe um:

Problem A: Gegeben sind Vektoren $\vec{v}$ und $\vec{p}$ [des $\mathbb{R}^3$]. Gesucht ist eine Zerlegung von $\vec{p}$ in der Form

$$\vec{p} \;=\; t\vec{v} + \vec{w} \quad \text{mit } \vec{w} \perp \vec{v}. \tag{18}$$

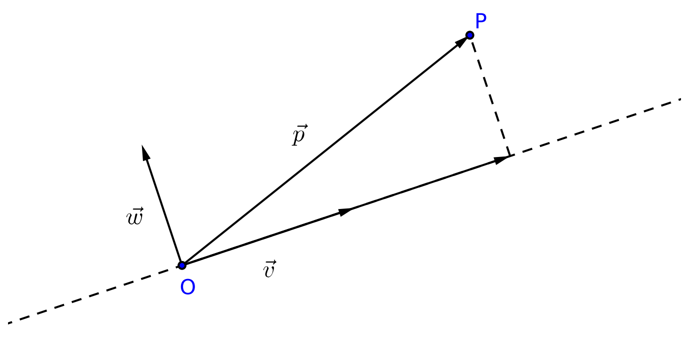


Abbildung 22: Problem B: Orthogonale Zerlegung

Das sieht künstlicher aus als die Ausgangsaufgabe. Für eure Profis mag es lohnen, über eine weitere Umformulierung nachzudenken, die noch etwas abstrakter ist:

Problem B: Gegeben sind Vektoren $\vec{v} \neq \vec{0}$ und $\vec{p}$ [des $\mathbb{R}^n$]. Gesucht ist eine Zerlegung

$$\vec{p} \;=\; \vec{v}_{\|} + \vec{v}_{\perp}$$

so, dass $\vec{v}_{\|}$ Vielfaches von $\vec{v}$ und $\vec{v}_{\perp}$ ein Element des Orthogonalraums von $\vec{v}$ ist:

$$\vec{v}_{\|} \in \{t\vec{v} \,|\, t \in \mathbb{R}\} \quad \text{und} \quad \vec{v}_{\perp} \in \{\, \vec{w} \in \mathbb{R}^n \,|\, \vec{w} * \vec{v} = 0\,\}$$

Wir wollen nun Problem A lösen, und dazu verwenden wir einen **Trick**: wir multiplizieren beide Seiten von Gleichung (18) skalar mit $\vec{v}$. Das ergibt

$$\vec{p} * \vec{v} \;=\; t(\vec{v} * \vec{v}) + \vec{w} * \vec{v} \quad .$$

Aber $\vec{w} * \vec{v} = 0$, wir haben also

$$\vec{p} * \vec{v} \;=\; t(\vec{v} * \vec{v}) \quad ,$$

und wir können t und damit $\vec{w}$ ausrechnen:

$$\begin{aligned} t \;&=\; \frac{\vec{p} * \vec{v}}{\vec{v} * \vec{v}} \\ \vec{w} \;&=\; \vec{p} - \frac{\vec{p} * \vec{v}}{\vec{v} * \vec{v}} \cdot \vec{v} \end{aligned}$$

Der gesuchte Abstand ist der Betrag des Vektors $\vec{w}$.

In der Regel geht die Gerade aber nicht durch den Nullpunkt. Im Allgemeneinen sucht man den Abstand eines Punktes P von einer Geraden $g: \ \vec{x}(t) = \vec{a} + t\vec{v}$. Verschiebt man Gerade und Punkt um $-\vec{a}$, ändert sich nichts am Abstand, und wir haben wieder alte Problem A mit $\vec{p}\,' = \vec{p} - \vec{a}$ und dem alten $\vec{v}$.

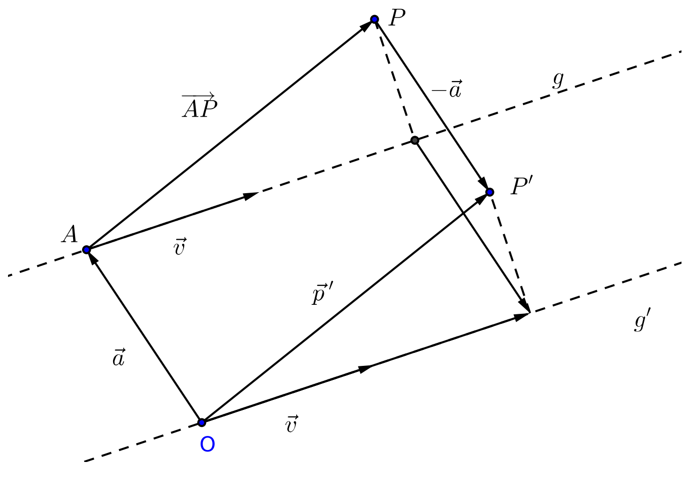


Abbildung 23: Reduktion des allgemeinen Falls auf Problem A

Anmerkung. Die Rechnung zur Lösung von Problem A zeigt, dass die Summenden $\vec{v}_{\|}$ und $\vec{v}_{\perp}$ der Zerlegung von $\vec{p}$ in Problem B eindeutig bestimmt sind.

5.3 Übungen und Variationen

1. **Zum Abstand Punkt/Gerade**
   Es soll der Abstand eines Raumpunktes P von einer Geraden

   $$g: \ \vec{x}(t) = \vec{a} + t\vec{v}$$

   bestimmt werden. Anton, Bruno und Carl haben ganz verschiedene Wege, wie man dieses Problem lösen könnte:

   A Ich bilde die Ebene mit dem Normalenvektor $\vec{v}$, die durch P geht, und suche den Schnittpunkt dieser Ebene mit g. Das ist der Fußpunkt des Lotes von P auf g.

   B Ich bilde den Vektor $\vec{p} - \vec{x}(t)$ und bestimme t so, dass der Vektor orthogonal zu $\vec{v}$ ist. Dann habe ich den t–Wert des Fußpunktes des Lotes von P auf g.

   C Ich bilde $f(t) = |\vec{p} - \vec{x}(t)|$ und berechne den Wert von t, für den $f(t)$ minimal wird. Das Minimum von f ist der gesuchte Abstand.

   Bilde die Ansätze der drei Experten und beurteile, ob deren Ideen zum Ziel führen [siehe dazu die Abbildungen 24, 25 und 26].

2. **Ein merkwürdiges Sechseck**
   Bei der Untersuchung des Sechsecks in Abbildung 19 aus Seite 41 standen wir vor der Frage, was man alles nachweisen muss, um sicher zu sein, dass es sich tatsächlich um ein ebenes regelmäßiges Sechseck handelt. Dass Vorsicht geboten ist, mag dir dieses kleine Beispiel zeigen: Es sei $A_1(0|0|0)$, $A_2(2|0|0)$, $A_3(2|0|2)$, $A_4(2|2|2)$, $A_5(2|2|0)$ und $A_6(0|2|0)$. Zeige, dass alle Seiten des Sechsecks $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$ die gleiche Länge haben, dass alle Innenwinkel rechte Winkel sind und dass es einen Punkt gibt, von dem alle Eckpunkte die gleiche Entfernung haben – das heißt, dass alle sechs Punkte sogar auf einer Kugelschale liegen. Dennoch handelt es sich nicht um das bekannte regelmäßige Sechseck! Nimm auch einmal die Summe der Innenwinkel unter die Lupe. [Du kannst das alles stur nachrechnen, das ist viel stumpfsinnige Arbeit; du kannst aber auch eine Zeichnung machen, dann solltest du eigentlich so sehen, dass die Behauptungen alle wahr sind]

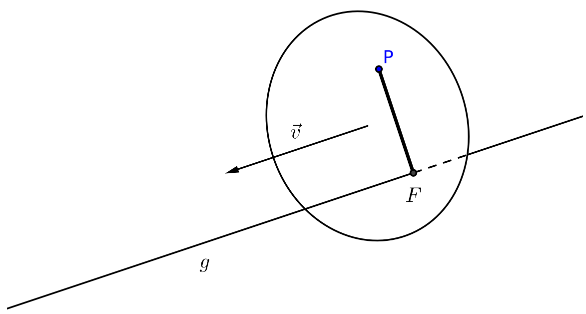


Abbildung 24: Zu Antons Vorschlag: Die Strecke von P zum Fußpunkt F des Lotes von P auf g liegt in der Ebene durch P, die den Richtungsvektor $\vec{v}$ von g als Normalenvektor hat.

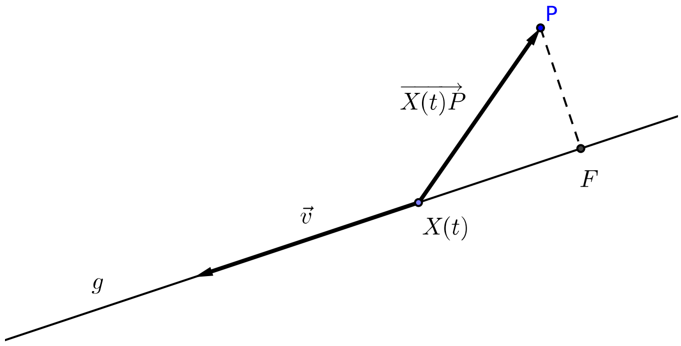


Abbildung 25: Bruno betrachtet den Pfeil, der von einem variablen Punkt $X(t)$ der Geraden zu P zeigt, und er bestimmt $X(t)$ so, dass dieser Pfeil mit dem Richtungspfeil $\vec{v}$ der Geraden einen rechten Winkel bildet.

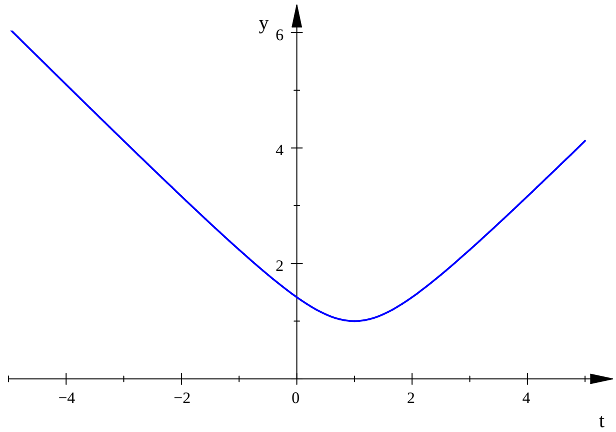


Abbildung 26: Carl betrachtet die Strecke von einem beliebigen Geradenpunkt $X(t)$ zu P. Die Länge der Strecke ist eine Funktion $f(t)$ von t. Du kannst dir überlegen, dass ihr Graph so aussehen muss wie der hier abgebildete Graph. Er hat genau einen Tiefpunkt $(t_0, f(t_0))$. Der gesuchte Abstand ist $f(t_0)$, der Lotfußpunkt ist $X(t_0)$.

5.4 Der Abstand paralleler Ebenen

Ebenen im Raum sind genau dann parallel, wenn ihre Normalenvektoren Vielfache voneinander sind. Wenn wir zwei parallele Ebenen durch Gleichungen beschreiben wollen, kann man also für beide den gleichen Normalenvektor $\vec{n} \neq \vec{0}$ nehmen, und das wollen wir auch tun. Wir fragen nach dem Abstand der Ebenen

$$E_1 : \ \vec{n} * \vec{x} \ = \ d_1 \qquad \text{und} \qquad E_2 : \ \vec{n} * \vec{x} \ = \ d_2 \ \ .$$

Für je zwei Punkte $A_1 \in E_1$ und $A_2 \in E_2$, für die $\overrightarrow{A_1A_2}$ ein Vielfaches von $\vec{n}$ ist, ist der gesuchte Abstand gerade die Länge der Strecke $\overline{A_1A_2}$. Wir bekommen bequem solche Punkte, indem wir die Schnittpunkte der Geraden

$$g : \ \vec{x}(t) = t\vec{n}$$

mit E_1 und mit E_2 nehmen. Es ergibt sich

$$\vec{a}_1 \ = \ \frac{d_1}{\vec{n} * \vec{n}} \cdot \vec{n} \qquad \text{und} \qquad \vec{a}_2 \ = \ \frac{d_2}{\vec{n} * \vec{n}} \cdot \vec{n} \ \ ,$$

der gesuchte Abstand ist folglich

$$|\vec{a}_2 - \vec{a}_1| \ = \ \left| \frac{d_2 - d_1}{\vec{n} * \vec{n}} \cdot \vec{n} \right| \ = \ \frac{|d_2 - d_1|}{|\vec{n}|} \ \ . \qquad (19)$$

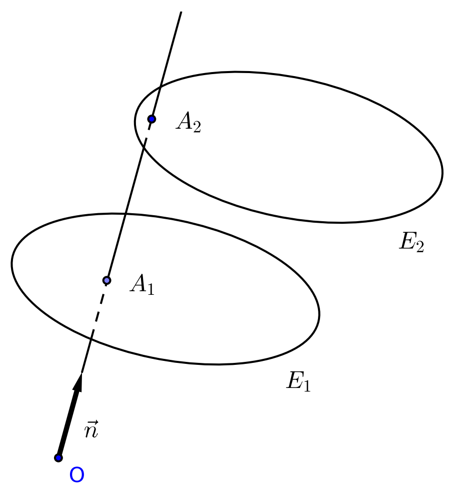


Abbildung 27: Zum Abstand paralleler Ebenen

Aufgabe. Wiederhole, wie wir den Abstand einer Ebene vom Nullpunkt berechnet haben, und vergleiche das Ergebnis mit dem Ergebnis des Abstandes paralleler Ebenen. Was bedeutet es anschaulich, wenn d_1 und d_2 verschiedene Vorzeichen haben? Was bedeutet es, wenn als Abstand 0 herauskommt?

5.5 Der Abstand zweier Geraden

Es seien

$$g_i : \vec{x}_i(t) \;=\; \vec{a}_i + t\vec{v}_i \;, \quad i = 1,2$$

zwei Geraden im Raum. Als Abstand der beiden Geraden wollen wir die Länge der kürzesten Verbindungsstrecke $|\overline{P_1P_2}|$ verstehen, wobei $P_1 \in g_1$ und $P_2 \in g_2$ gilt. Wir wollen uns zwei Wege anschauen, diesen Abstand zu berechnen.

Tims Weg. Für $P_1 \in g_1$ und $P_2 \in g_2$ bilden wir den Vektor

$$\vec{w} \;=\; \overrightarrow{P_1P_2} \;=\; \vec{p}_2 - \vec{p}_1 \;=\; \vec{a}_2 + t_2\vec{v}_2 - (\vec{a}_1 + t_1\vec{v}_1) \quad .$$

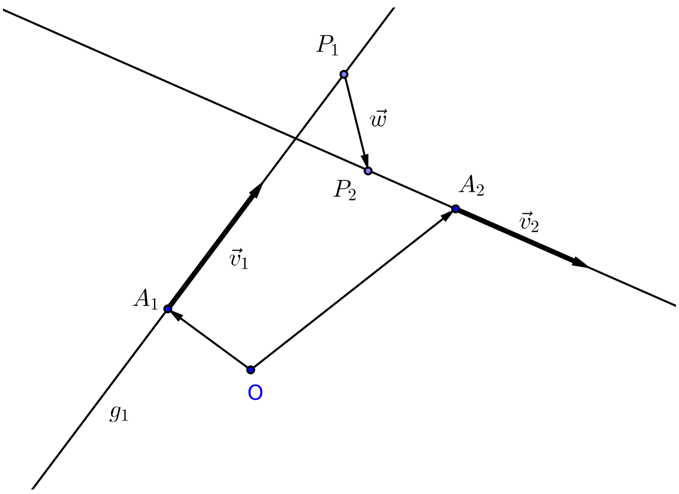


Abbildung 28: Zu Tims Ansatz

Wir haben den richtigen Vektor $\vec{w}$, wenn er sowohl orthogonal zu $\vec{v}_1$ als auch zu $\vec{v}_2$ ist:

$$\vec{w} * \vec{v}_1 \;=\; 0 \qquad \text{und} \qquad \vec{w} * \vec{v}_2 \;=\; 0$$

Schreiben wir diese Gleichungen aus, erhalten wir ein 2×2–LGS für die Parameter t_1, t_2 der gesuchten Punkte:

$$\begin{aligned} -\vec{v}_1 * \vec{v}_1 \cdot t_1 + \vec{v}_2 * \vec{v}_1 \cdot t_2 \;&=\; (\vec{a}_1 - \vec{a}_2) * \vec{v}_1 \\ -\vec{v}_1 * \vec{v}_2 \cdot t_1 + \vec{v}_2 * \vec{v}_2 \cdot t_2 \;&=\; (\vec{a}_1 - \vec{a}_2) * \vec{v}_2 \end{aligned}$$

Übersichtlicher finde ich die Vektor–Matrix–Schreibweise

$$\begin{pmatrix} -\vec{v}_1 * \vec{v}_1 & \vec{v}_2 * \vec{v}_1 \\ -\vec{v}_1 * \vec{v}_2 & \vec{v}_2 * \vec{v}_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} t_1 \\ t_2 \end{pmatrix} \;=\; \begin{pmatrix} (\vec{a}_1 - \vec{a}_2) * \vec{v}_1 \\ (\vec{a}_1 - \vec{a}_2) * \vec{v}_2 \end{pmatrix} \quad ,$$

weil man den Aufbau besser sieht, aber da kannst du deine eigene Entscheidung treffen.

Weg über parallele Ebenen. Mathematiker führen gern ein neues Problem auf schon gelöste zurück. Es gibt einen alten Witz dazu: Was tut ein Mathematiker, der einen Topf Wasser zum Kochen bringen will? Klar, er nimmt den Topf vom Tisch und stellt ihn auf den Herd. Und was tut ein Mathematiker, der einen Topf Wasser zum Kochen bringen will, der im Nebenraum steht? Er holt den Topf aus dem Nebenraum und stellt ihn auf den Tisch, dann hat er das neue Problem auf ein gelöstes zurückgeführt. – Hier geht dieses Patentverfahren so: Durch

$$E_0: \ \vec{x}(s,t) \ = \ s\vec{v}_1 + t\vec{v}_2$$

sollte eine Ebene durch den Nullpunkt gegeben sein, zu der sowohl g_1 als auch g_2 parallel sind. Der gesuchte Abstand der Geraden ist der Abstand der Ebenen

$$E_1: \vec{n} * \vec{x} \ = \ \vec{n} * \vec{a}_1 \qquad \text{und} \qquad E_2: \vec{n} * \vec{x} \ = \ \vec{n} * \vec{a}_2 \ \ ,$$

wobei $\vec{n}$ ein Normalenvektor von E_0 ist. Fertig, den Rest liefert das Ergebnis von Gleichung (19).

Anmerkung. Der zweite Weg funktioniert nur, wenn die Geraden nicht parallel sind, und man bekommt nur den Abstand, nicht das Punktepaar mit der kürzesten Strecke.

Zum Nachdenken. Was passiert bei Tims Weg, wenn die Geraden parallel sind?

5.6 Aufgaben

1. Gegeben sei eine Pyramide im Raum. Die Ecken der Grundfläche sind die Punkte $A(0|0|2)$, $B(2|2|0)$ und $C(2|-1|2)$, und die Spitze ist der Nullpunkt.
   (a) Zeichne.
   (b) Berechne die Höhe der Pyramide.
   (c) Kläre, ob der Fußpunkt des Lotes von der Spitze auf die Grundfläche außerhalb der Grundfläche liegt.

2. Es seien $\vec{v}, \vec{w} \in \mathbb{R}^3$ von $\vec{0}$ verschiedene Vektoren, die nicht Vielfache von einander sind. Zu welchen geometrischen Gebilden gehören die folgenden Vektormengen?

$$\begin{aligned}
M_1 &:= \{\, r\vec{v} + s\vec{w} \,|\, r, s, \in \mathbb{R} \,\} \\
M_2 &:= \{\, r\vec{v} + s\vec{w} \,|\, r, s, \in \mathbb{R};\ 0 \le r, s \,\} \\
M_3 &:= \{\, r\vec{v} + s\vec{w} \,|\, r, s, \in \mathbb{R};\ 0 \le r, s, \le 1\} \\
M_4 &:= \{\, r\vec{v} + s\vec{w} \,|\, r, s, \in \mathbb{R};\ r + s = 1 \,\} \\
M_5 &:= \{\, r\vec{v} + s\vec{w} \,|\, r, s, \in \mathbb{R};\ 0 \le r, s;\ r + s = 1 \,\} \\
M_6 &:= \{\, r\vec{v} + s\vec{w} \,|\, r, s, \in \mathbb{R};\ 0 \le r, s;\ r + s \le 1 \,\} \\
M_7 &:= \{\, r\vec{v} + s\vec{w} \,|\, r, s, \in \mathbb{Z} \,\}
\end{aligned}$$

5.7 Winkel

Wir wollen die Größe des Winkels φ berechnen, den die Pfeile zu Vektoren $\vec{v}, \vec{w}$ bilden. Diesen Winkel wollen wir dann als den „Winkel zwischen den Vektoren“ ansehen.

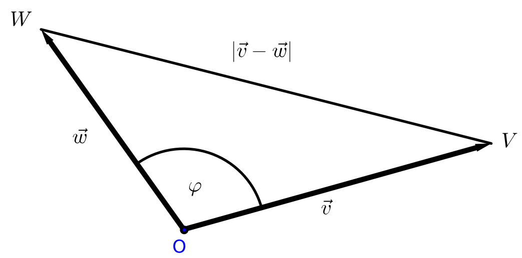


Abbildung 29: Winkel φ zwischen den Vektoren $\vec{v}$ und $\vec{w}$

Nach dem Kosinussatz aus der ebenen Geometrie gilt für die Seiten a, b, c und den Winkel α eines jeden ebenen Dreiecks ABC die Gleichung

$$a^2 \;=\; b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos(\alpha) \quad ,$$

man spricht gern vom „verallgemeinerten Pythagoras“. In der Tat steht da für $\alpha = 90°$ der Satz des Pythagoras, für andere Winkel α tritt eben noch ein Korrektursummand hinzu.

Der Beweis des Satzes ist nicht schwer, aber wir wollen uns jetzt nicht mit Trigonometrie beschäftigen, sondern wenden den Satz auf das durch die Vektoren gegebene Dreieck OVW an – siehe Abbildung 29. Das ergibt, wenn wir $|\vec{x}| = \sqrt{\vec{x} * \vec{x}}$ beachten,

$$(\vec{v} - \vec{w}) * (\vec{v} - \vec{w}) \;=\; \vec{v} * \vec{v} + \vec{w} * \vec{w} - 2|\vec{v}| \cdot |\vec{w}| \cdot \cos(\varphi) \quad .$$

Wir multiplizieren die linke Seite aus und vereinfachen die Gleichung zu

$$-2\vec{v} * \vec{w} \;=\; -2|\vec{v}| \cdot |\vec{w}| \cdot \cos(\varphi) \quad .$$

Noch durch -2 dividieren, und schon steht da die fantastische Gleichung

$$\vec{v} * \vec{w} \;=\; |\vec{v}| \cdot |\vec{w}| \cdot \cos(\varphi) \quad . \tag{20}$$

Anmerkungen.

1. Mit Gleichung (20) können wir den Winkel zwischen beliebigen Vektoren ausrechnen – alle Zahlen in der Gleichung außer $\cos(\varphi)$ kennen wir, und damit bekommen wir den Kosinus des Winkels und daraus wiederum den Winkel selbst (zwischen $0°$ und $180°$).

2. Das geht in jedem Raum $\mathbb{R}^n$ mit $n \geq 2$. Wir können also dank des Skalarproduktes über Winkel (und Längen) in Räumen beliebig großer Dimension sprechen und damit rechnen, und das ist doch eine bemerkenswerte Sache.

Aufgabe. Von einer Ecke eines Würfels gehen Flächendiagonalen, Kanten und eine Raumdiagonale aus. Welche Winkel entstehen? Schätze zunächst!

5.8 Technische Übungen

1. Hier siehst du unseren Standardwürfel mit den Eckpunkten $A(0|0|0)$, $B(2|0|0)$, $C(2|2|0)$ und $A'(0|0|2)$.

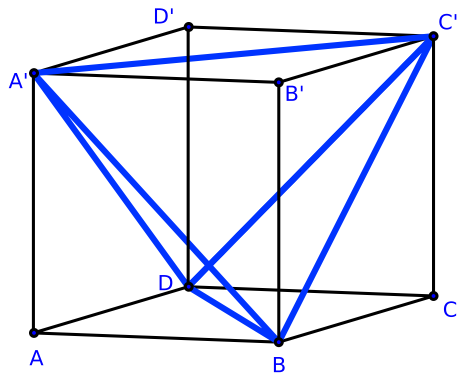


Abbildung 30: Einem Würfel einbeschriebenes Tetraeder

   (a) Berechne Schnittgerade und Schnittwinkel der Ebenen durch $A'BC'$ und $A'DC'$). [Als Schnittgerade muss natürlich $A'C'$ herauskommen]

   (b) Untersuche den dem Würfel einbeschriebenen Körper.

2. Im Nullpunkt des Raumes befindet sich ein Laser. Er strahlt zunächst in Richtung $\vec{v}$, dann wird er so gedreht, dass er schließlich in Richtung $\vec{w}$ strahlt. Dabei ist

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad \vec{w} = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} .$$

   (a) Gib eine Koordinatengleichung der Ebene an, in der der Strahl sich bei der Drehung bewegt.

   (b) Um welchen Winkel wird der Strahl gedreht?

   (c) Welche Punkte der Menge

$$\left\{ \begin{pmatrix} x \\ 5 \\ z \end{pmatrix} \middle|\, x \in \mathbb{R},\ 0 \leq z \leq 12 \right\}$$

   beleuchtet der Strahl?

3. Stelle den Vektor $\vec{b}$ als Linearkombination der Vektoren $\vec{a}_1$ und $\vec{a}_2$ dar, das heißt: schreibe $\vec{b}$ in der Form $r_1\vec{a}_1 + r_2\vec{a}_2$.

$$\vec{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}, \qquad \vec{a}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \qquad \vec{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix}$$

5.9 Schnittwinkel zwischen Gerade und Ebene

Eine Gerade $g: \vec{x}(t) = \vec{a} + t\vec{v}$ schneide eine Ebene E mit Normalenvektor $\vec{n}$ in einem Punkt S. Nach unserer Raumanschauung ist es sinnvoll, von einem Winkel φ zu sprechen, den die Gerade mit der Ebene bildet – denke an einen Stab, der im Boden steckt. Um den Winkel zu bekommen, fällt man das Lot von einem beliebigen Geradenpunkt $\neq S$ auf die Ebene. Der gesuchte Winkel ist dann der Winkel, den die Gerade mit der Strecke von S zum Fußpunkt F des Lotes bildet, genauer gesagt, der kleinste der beiden Winkel.

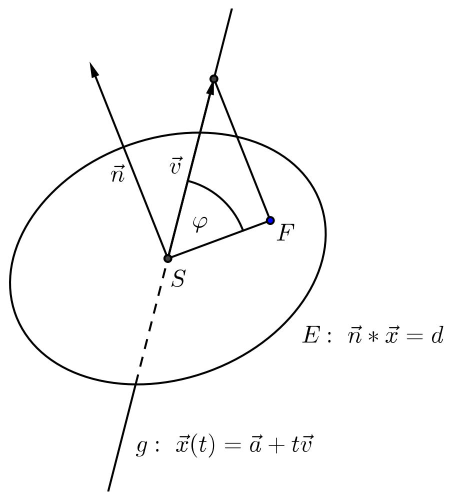


Abbildung 31: Winkel zwischen einer Geraden g und einer Ebene E

Die Situation ist in Abbildung 31 dargestellt. Wenn du dir die Abbildung genau anschaust, erkennst du, dass man φ leicht bekommen kann, ohne ein F zu berechnen: Man berechnet den Winkel zwischen dem Normalenvektor $\vec{n}$ der Ebene und dem Richtungsvektor $\vec{v}$ der Geraden. Kommt dabei mehr als $90°$ heraus, nimmt man den Nebenwinkel. Wenn man diesen Winkel von $90°$ subtrahiert, hat man φ.

Fragen

1. Welchen Ortsvektor hat der Geradenpunkt in Abbildung 31, von dem aus das Lot auf die Ebene gefällt wurde?
2. Wie sieht die Sache aus, wenn der Winkel zwischen $\vec{v}$ und $\vec{n}$ größer als $90°$ ist?
3. Unter welchem Winkel schneidet eine Raumdiagonale eines Würfels eine Fläche des Würfels? Schätze zuerst.
4. Gibt es immer eine Gerade durch S, die in E verläuft und die zu g orthogonal ist?
5. Wie verhält sich der Schnittwinkel, wenn man den Wert von d auf der rechten Seite der Ebenengleichung ändert?

5.10 Schnittwinkel zweier Ebenen

Zwei Ebenen, die sich schneiden, und den Winkel zwischen ihnen siehst du zum Beispiel, wenn du ein Buch etwas aufklappst. Der Rücken ist die Schnittgerade, die Buchdeckel sind die Ebenen, und die beiden Unterkanten, meintwegen, sind die Schenkel des Schnittwinkels.

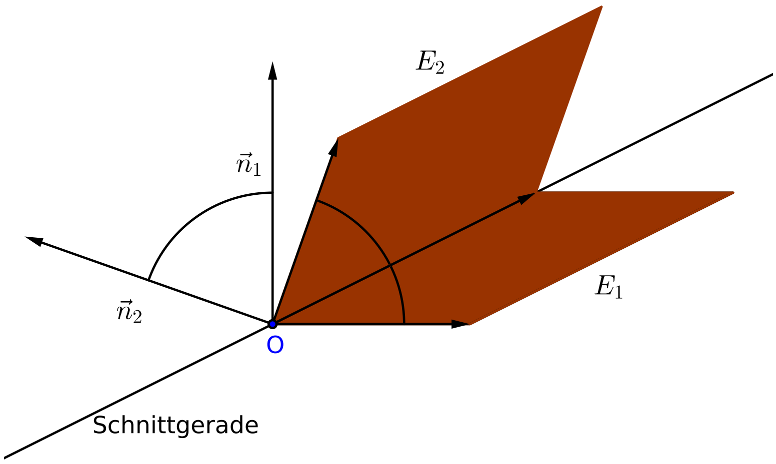


Abbildung 32: Schnittwinkel zweier Ebenen

Die Ebene E_1 sei die xy–Ebene, die Schnittgerade der beiden Ebenen die y–Achse. In Abbildung 32 sind die Ebenen E_1 und E_2 durch Rechtecke dargestellt, die gemeinsame Kante liegt in der Schnittgeraden. Der Winkel zwischen den Ebenen liegt in der xz–Ebene, er ist durch einen Kreisbogen angedeutet. Eingezeichnet sind auch Normalenvektoren der beiden Ebenen. Ich stelle mir das nun so vor, dass die Ebene E_1 um die Schnittgerade gedreht wird, bis sie mit der Ebene E_2 zur Deckung kommt; der Drehwinkel dabei ist gerade der gesuchte Winkel zwischen den Ebenen. Diese Drehung bringt den Normalenvektor $\vec{n}_1$ von E_1 in einen Normalenvektor $\vec{n}_2$ von E_2. **Der gesuchte Winkel zwischen den Ebenen ist also genau so groß wie der Winkel zwischen Normalenvektoren der Ebenen**, und der ist kinderleicht zu berechnen. Es mag höchstens sein, dass die Normalenvektoren einen stumpfen Winkel bilden, dann geht man zum Nebenwinkel über.

5.11 Kleine Sammlung Sjardscher Probleme

Ein Punkt P des Raumes soll an einer Ebene E gespiegelt werden. Gesucht ist der Bildpunkt P'. Das ist ein hübsches Problem. Man kann P' einfach mit Standardwerkzeugen bestimmen, man kann, falls E den Nullpunkt enthält, die Abbildung $\varphi:\ \vec{p} \mapsto \vec{p}\,'$ wie Oliver als Matrixabbildung schreiben, und man kann sich auch von Sjard anregen lassen, Purzelbäume zu machen. In der folgenden kleinen Aufgabensammlung kommt das alles zu seinem Recht.

Wir gehen aus von der Ebene $E: \ \vec{n} * \vec{x} = 0$ und $\vec{p} \in \mathbb{R}^3$. Wenn du gut trainiert bist, kannst du relativ weit mit Variablen rechnen und das Problem allgemein lösen. Irgendwann wirst du konkrete Daten haben wollen, da nimmst du halt

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad \vec{p} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix} .$$

1. **Standardwege über den Fußpunkt F des Lotes von P auf E:**
   (a) Mache dir klar, dass $\vec{p}\,' = \vec{p} + 2\overrightarrow{PF}$ ist.
   (b) Bestimme F mit Hilfe orthogonaler Zerlegung $\vec{p} = t\vec{n} + \vec{w}$ mit $\vec{w} \perp \vec{n}$.
   (c) Bestimme F als Schnittpunkt der Geraden durch P mit Richtungsvektor $\vec{n}$ mit der Ebene E.
   (d) Bestimme t so, dass $(\vec{p} - t\vec{n}) * \vec{n} = 0$ ist, und erkläre die Idee dieses Ansatzes.

2. **Olivers Abbildungsmatrix**
   Erinnere dich an das Merkverslein, bestimme damit die richtige Matrix und mache dir klar, dass es sich überhaupt um eine Matrixabbildung handelt: die Bilder der Einheitsvektoren legen bereits die Bildvektoren eines jeden $\vec{x} \in \mathbb{R}^3$ fest. [Hinweis: Falls E nicht den Nullpunkt enthält, bleibt der auch nicht fest, und dann kann die Abbildung keine Matrixabbildung sein]

3. **Sjards Winkel zwischen $\vec{n}$ und $\vec{p}$**
   (a) Berechne den Winkel α, den $\vec{p}$ und $\vec{n}$ bilden.
   (b) Schreibe eine Gleichung für die Vektoren $\vec{x}$ hin, die mit $\vec{n}$ den gleichen Winkel bilden, und überlege dir, welches geometrische Gebilde dahintersteckt.
   (c) Finde überhaupt einen konkreten Vektor, der mit $\vec{n}$ den Winkel α bildet. Der Vektor soll aber kein Vielfaches von $\vec{p}$ sein.
   (d) Sjard will in der Ebene bleiben, in der P und die von $\vec{n}$ erzeugte Gerade liegen. Schreibe eine Parameterdarstellung für diese Ebene hin: der allgemeine Vektor $\vec{x}(s,t)$ ist eine Linearkombination von $\vec{n}$ und $\vec{p}$. Kannst du die Bedingung, dass $\vec{x}(s,t)$ mit $\vec{n}$ den Winkel α bilden soll, rechnerisch verwerten? Kommst du damit zum Ziel?

4. **Orthogonale Basis**
   Suche von $\vec{0}$ verschiedene Vektoren $\vec{v}$ und $\vec{w}$, die zu $\vec{n}$ orthogonal sind und die auch noch untereinander orthogonal sind. Wenn du $\vec{p}$ als Linearkombination

   $$\vec{p} = r\vec{n} + s\vec{v} + t\vec{w}$$

   von $\vec{n}, \vec{v}, \vec{w}$ schreiben kannst, ist offensichtlich

   $$\vec{p}\,' = -r\vec{n} + s\vec{v} + t\vec{w} .$$

   Wenn du die Vorfaktoren r, s, t kennst, sind wir fertig. Die kannst du über ein 3×3–LGS berechnen, viel besser aber mit dem Trick aus der orthogonalen Zerlegung. Probiere es mal.

6 Platonische Körper

6.1 Einführung

Schon in der Antike beschäftigte man sich mit Polyedern, also mit Körper, die von ebenen Vielecken begrenzt wurden. Als besonders vollkommen wurden die angesehen,

1. deren Seitenflächen kongruente regelmäßige Vielecke sind und
2. deren Ecken alle kongruent sind,

und das sind die berühmten **platonischen Körper**. Sie spielen auch in Keplers Weltgeheimnis eine wichtige Rolle.

Einen dieser Körper kennst du gut: Ein **Würfel** hat Quadrate als Seitenflächen, und in jeder Ecke stoßen drei von ihnen zusammen.

Es gibt nicht allzuviele von diesen platonischen Körpern, und das kommt so: In jeder Ecke müssen mindestens drei Flächen zusammenstoßen. Die Innenwinkel an dem gemeinsamen Eckpunkt müssen zusammen kleiner als 360° sein, sonst kann man keine Körperecke bilden; ein Innenwinkel muss folglich kleiner als 120° sein. Der Innenwinkel eines regelmäßigen Sechsecks ist 120°, und in der Tat erhält man ein ebenes Gebilde, wenn man drei regelmäßige Sechsecke zusammenlegt. Der Innenwinkel eines regelmäßigen Fünfecks ist 108° groß, man kann also eine Körperecke aus drei Fünfecken bilden, aber nicht von vier oder mehr. Genauso ist es bei Quadraten, man kann aus dreien eine Körperecke bilden (und erhält den Würfel als Körper), aber nicht aus vier oder mehr. Nur von gleichseitigen Dreiecken kann man drei, vier oder fünf nehmen und verkleben.[13] Folglich gibt es insgesamt nur fünf Bausätze für Körperecken. Dass es auch nur fünf platonische Körper gibt, ist leichter hingeschrieben als exakt bewiesen. Ein Beweis, der keine Puddinganteile mehr enthält, das heißt, der sich nicht stark auf Anschauung stützt, verwendet ordentliche Algebra. Es mag dich beruhigen, dass es einen solchen Beweis gibt.[14] Man muss sehr sorgfältig definieren, was ein platonischer Körper ist; ich habe euch ja ein schräges Beispiel[15] gezeigt, das 1946 von van der Waerden und Freudenthal konstruiert wurde.[16] Man muss zum Beispiel fordern, dass die Ecken des Körpers kongruent sind oder dass alle Eckpunkte auf einer Kugel liegen.

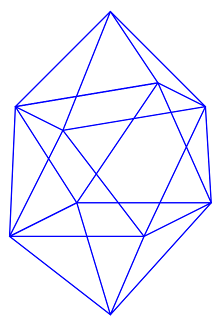


Abbildung 33: Beispiel eines Körpers aus kongruenten gleichseitigen Dreiecken, der kein platonischer Körper ist (Freudenthal und van der Waerden)

[13] Zeichnungen der möglichen Eckenbausätze findest du in Abbildung 34.
[14] Siehe z.B. M. A. Armstrong, Groups and Symmetry, Springer–Verlag New York 1988; hier die Kapitel 8 und 19
[15] siehe Abbildung 33
[16] B. Artmann, Euclid – The Creation of Mathematics, Springer–Verlag New York 1999, S. 297

6.2 Konstruktion von Oktaeder und Tetraeder

Man sagt, ein wichtiges Ziel Euklids großer Geometrie sei der Nachweis der Existenz der platonischen Körper gewesen. Wir haben es leichter als Euklid, wir können für die Körper Listen der Koordinaten der Eckpunkte angeben. Für den **Würfel** haben wir das mehrfach gemacht.

Ihr habt mit den dreieckigen Plastikbausteinen experimentiert: drei Dreiecke ergeben eine Ecke eines **Tetraeders**, vier Dreiecke eine Ecke eines **Oktaeders**. Eine anschauliche Vorstellung dieser Körper habt ihr also. Eine schöne Darstellung des Oktaeders erhalten wir, wenn wir die sechs Punkte mit den Ortsvektoren $\pm\vec{e}_1, \pm\vec{e}_2, \pm\vec{e}_3$ verwenden. Wir können auch die sechs Flächenmittelpunkte eines Würfels verwenden, auch die liefern ein System von Oktaedereckpunkten.

Um ein System von Eckpunkten eines Tetraeders zu gewinnen, können wir in der xy–Ebene ein gleichseitiges Dreieck mit Zentrum im Nullpunkt verwenden und einen Punkt auf der z–Achse so bestimmen, dass seine Entfernung von den Ecken gleich der Kantenlänge des Dreiecks ist. Das ergibt aber recht hässliche Koordinaten. Besser nimmt man einen Würfel. Nicht–parallele Flächendiagonalen gegenüberliegender Flächen sind Kanten eines Tetraeders – siehe Abbildung 30 auf Seite 54 und Abbildung 36 auf Seite 60. So bekommt man, wenn man vom Einheitswürfel ausgeht, als Tetraedereckpunkte diese hier:

$$A(0|0|0),\ B(1|1|0),\ C(1|0|1),\ D(0|1|1)\ . \tag{21}$$

Man rechnet leicht nach, dass je drei von ihnen ein gleichseitiges Dreieck mit der Kantenlänge $\sqrt{2}$ bilden.

Aufgaben

1. Das Zentrum eines gleichseitigen Dreiecks sei der Nullpunkt der Ebene, ein Eckpunkt der Punkt $A(1|0)$. Bestimme die beiden anderen Ecken B und C.

2. Bette das Dreieck ABC der vorigen Teilaufgabe in die xy–Ebene eines räumlichen Koordinatensystems ein – das Zentrum in den Nullpunkt – und bestimme einen Punkt S auf der z–Achse so, dass $ABCS$ ein regelmäßiges Tetraeder ist.

3. Berechne die Kantenlänge des Tetraeders mit den Eckpunkten aus Gleichung (21) auf Seite 59.

4. Berechne beim Tetraeder und beim Oktaeder die Winkel zwischen benachbarten Flächen.

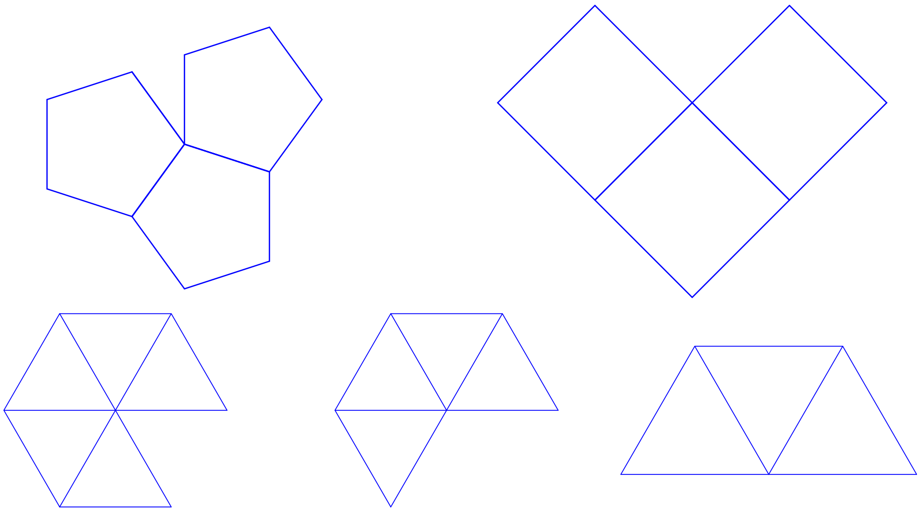


Abbildung 34: Die möglichen Bausätze für Ecken platonischer Körper

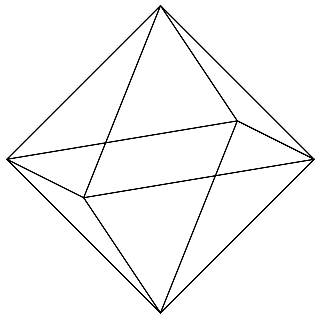


Abbildung 35: Oktaeder

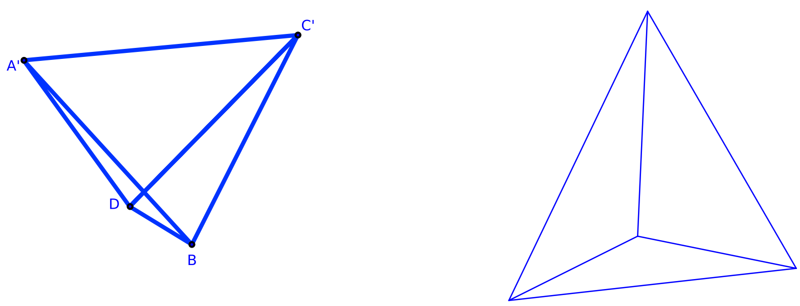


Abbildung 36: Ein Tetraeder, das auf einer Kante steht, und ein Tetraeder, das auf einer Fläche steht, wirken wie zwei verschiedene Körper

6.3 Einschub: Vermischte Aufgaben zur Raumgeometrie

1. Der Raumpunkt P hat von $F(0|0|4)$ den Abstand 5, und P liegt in der xy–Ebene. Stelle eine Gleichung auf und beschreibe die Lösungsmenge geometrisch.

2. Der Raumpunkt P hat von $A(3|4|5)$ und von $B(-1|2|1)$ die gleiche Entfernung. Bestimme die Lösungsmenge und beschreibe sie geometrisch.

3. Das Dreieck mit den Eckpunkten P, $A(3|4|5)$ und $B(-1|2|1)$ hat einen rechten Winkel bei P. Stelle eine Gleichung für die Koordinaten von P auf.

4. Der Raumpunkt P hat von $A(3|4|5)$ und von $B(-1|2|1)$ die gleiche Entfernung, und er liegt auf der Geraden

$$g:\ \vec{x}(t) = \vec{c} + t\vec{v} \qquad \text{mit} \qquad \vec{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} \quad .$$

   Bestimme P.

5. Der kleine Tim hält seine Armbanduhr so, dass er mit Hilfe der Sonne einen hellen Fleck in eine Ecke des Klassenraums über der Tafel zaubert. Das Kunststück fällt ihm möglicherweise leichter als dir die Rechnung, wie die Glasscheibe der Uhr zu halten ist: Das Sonnenlicht falle in Richtung des Vektors

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

   ein, es trifft das (ebene) Uhrglas im Punkt $(0|0|0)$, und der reflektierte Lichstrahl beleuchtet den Punkt $P(5|4|3)$ an der Wand. Wie hält Tim die Uhr? [Unser Tim ist das nicht, K12 hat nur Westfenster]

6. Es geht um die Schar aller Ebenen, die durch die beiden Punkte $A(1|1|1)$ und $B(1|-1|1)$ gehen.

   (a) Welche Schnittgebilde haben die Ebenen der Schar mit unserem Oktaeder? Zähle die Formen auf.

   (b) Bestimme die Ebene der Schar, die durch $(2|0|0)$ geht.

   (c) Justin bezeichnet mit E_a die Ebene der Schar, die durch $(a|0|0)$ geht. Welche Darstellung für E_a erhält er? [Natürlich stellt er eine Koordinatengleichung auf, wie jeder vernünftige Mensch]

   (d) Erwischt Justin alle Ebenen der Schar?

7. Der Abstand des Punktes P von der xy–Ebene ist genau so groß wie seine Entfernung von $F(0|0|2)$. Wie sieht die Lösungsmenge aus?

8. Der Punkt P hat von der Ebene $E:\ 2x - 4y + 4z = 0$ den Abstand 6, und er liegt auf der Geraden

$$g:\ \vec{x}(t) = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad .$$

   Bestimme die Lösungsmenge.

9. Liegen die Punkte $A(12|25|6)$ und $B(10|30|8)$ auf verschiedenen Seiten der Ebene E aus der vorigen Teilaufgabe?

10. Gegeben seien eine Geradenschar g_a und eine Gerade h mit

$$g_a:\ \vec{x}_a(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ a \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ a \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad h:\ \vec{x}(t) = \begin{pmatrix} 7 \\ 11 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad .$$

Welche Schargerade schneidet h? Beschreibe auch, wie die Schargeraden aussehen und welches geometrische Objekt von allen Geraden gebildet wird.

11. Bestimme den Schnittpunkt der Geraden durch $P(4|0|1)$ und $Q(-5|1|0)$ mit der Ebene durch die Punkte $A(1|0|0)$, $B(0|1|0)$ und $C(0|0|1)$ und stelle fest, ob der Schnittpunkt im Innern des Dreiecks ABC liegt. Und sag mal: woher kennst du das Dreieck?

12. Bestimme den Abstand des Punktes $P(-1|0|0)$ von dem Dreieck ABC aus der vorigen Teilaufgabe.

13. Was sind denn das für schräge Punktmengen?

$$\begin{aligned}
M_1 &= \left\{ \begin{pmatrix} t \\ y \\ \sin(t) \end{pmatrix} \middle|\, t, y \in \mathbb{R} \right\} \\
M_2 &= \left\{ \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \\ z \end{pmatrix} \middle|\, 0 \le t < 2\pi,\ 0 \le z \right\} \\
M_3 &= \left\{ \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \\ \frac{1}{10}t \end{pmatrix} \middle|\, 0 \le t \right\} \\
M_4 &= \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ \sqrt{x^2+y^2} \end{pmatrix} \middle|\, x, y \in \mathbb{R} \right\}
\end{aligned}$$

6.4 Bericht über das Dodekaeder

Das Dodekaeder besteht aus zwölf regelmäßigen Fünfecken, seine Konstruktion ist etwas verzwickt. Wir folgen ungefähr dem Weg, den schon Euklid gebahnt hat.

Beginnen wir mit einem regelmäßigen Fünfeck mit einer Diagonalen. Die Diagonale zerlegt das Fünfeck in ein gleichschenkliges Trapez und ein gleichschenkliges Dreieck.

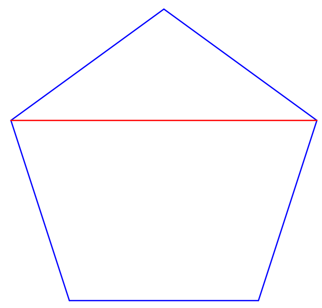


Abbildung 37: Regelmäßiges Fünfeck mit einer Diagonalen

Wir verwenden die Diagonale als Kante eines Quadrats und zeichnen ein zweites Trapez ein wie in Abbildung 38.

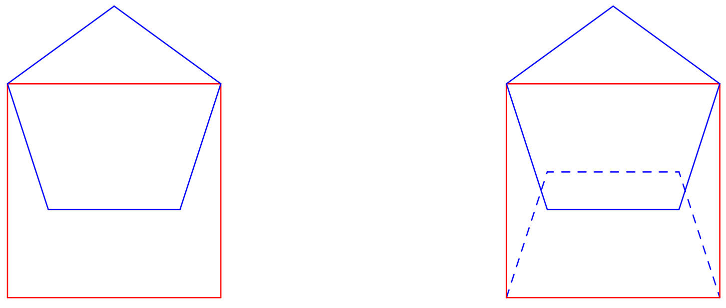


Abbildung 38: Fünfeck mit Quadrat aus Diagonalen

Die beiden Trapeze überlappen sich. Wir können sie um die Quadratkanten hochdrehen und erhalten ein Walmdach. Bei den beiden dreieckigen Dachflächen, die dabei entstehen, handelt es sich genau um das Dreieck aus Abbildung 37.

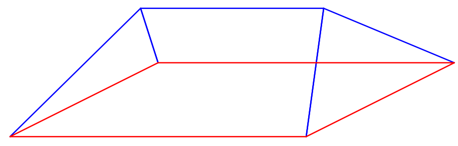


Abbildung 39: Walmdach über dem Diagonalenquadrat aus den Teilen zweier Fünfecke

Den Boden des Walmdachs ergänzen wir zu einem Würfel und kleben an die rechte Würfelfläche ein weiteres Walmdach an wie in Abbildung 40 gezeigt.

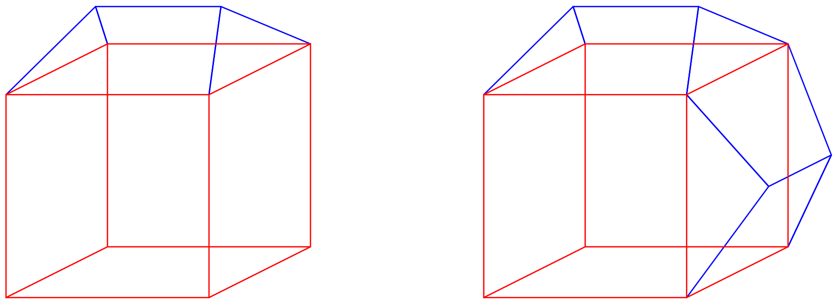
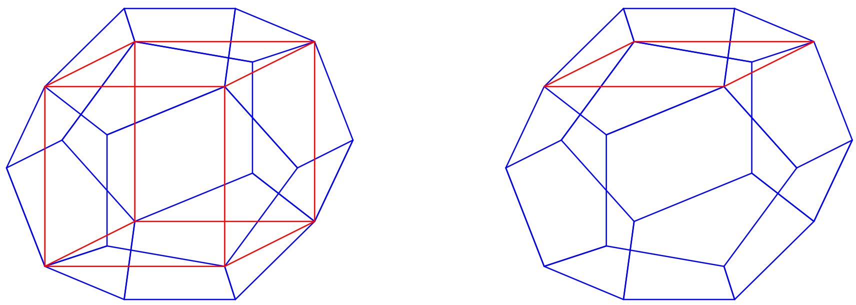


Abbildung 40: Würfel mit Walmdächern

Ein Dreieck des einen und ein Trapez des anderen Walmdachs bilden ein Fünfeck. Man kann nachweisen, dass es sich um ein ebenes Fünfeck handelt und nicht etwa an der gemeinsamen Würfelkante ein Knick ist. Setzt man nun auf die anderen Würfelflächen ebenfalls Walmdächer in rechter Ordnung, entsteht ein Dodekaeder, dem ein Würfel einbeschrieben ist. Wir entfernen den Würfel nach und nach –



– und da ist das Dodekaeder.

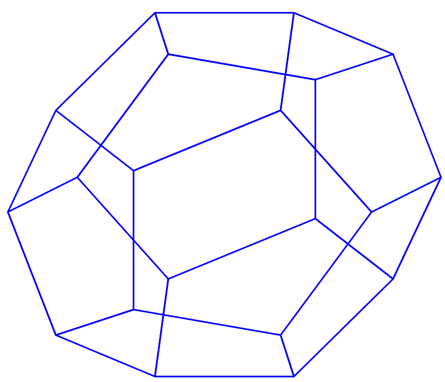


Abbildung 41: Dodekaeder

Anmerkung: Die zwölf Mittelpunkte der Seitenflächen sind die Eckpunkte eines **Ikosaeders**, seine Seitenflächen sind zwanzig gleichseitige Dreiecks. Damit ist unsere Sammlung platonischer Körper vollständig.

7 Determinanten

7.1 Motivation und Definition

Hier siehst du das von drei Vektoren $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in \mathbb{R}^3$ „aufgespannte Parallelepiped“. Das ist ein Körper. Die Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ spannen ein Parallelogramm auf, das kannst du als Grundfläche ansehen. Dieses Parallelogramm wird um den Vektor $\vec{c}$ verschoben. Das verschobene Parallelogramm ist quasi der Deckel des Körpers. Auf seinem Weg aus der Ausgangslage in die Endlage in der durch $\vec{c}$ gegebenen Richtung schiebt sich das von $\vec{a}$ und $\vec{b}$ aufgespannte Parallelogramm durch den Körper.

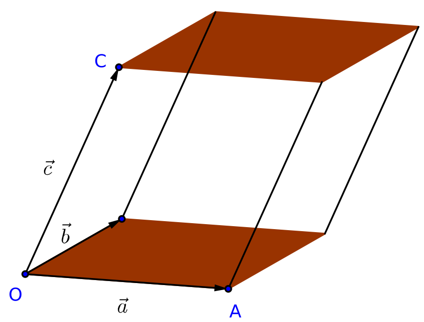


Abbildung 42: Von den Vektoren $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ aufgespanntes Parallelepiped

Die Determinante ordnet dem Satz $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ von Vektoren eine Zahl zu, und der Betrag dieser Zahl ist das Volumen des Parallelepipeds – da geht die Reise hin. Das Formelzeichen ist

$$\det((\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})) \quad \text{oder kurz} \quad \det(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) \quad , \tag{22}$$

dabei ist $M = (\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ die Matrix mit den Spaltenvektoren $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$. Wir tasten uns nun langsam an die Sache heran.

1. Natürlich muss

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} := 1 \tag{23}$$

   sein, da steht ja das Volumen des Einheitswürfels, also des „Maßpolytops“ des Raumes.

2. Die Vektoren $x_1\vec{e}_1,\ x_2\vec{e}_2,\ x_3\vec{e}_3$ spannen einen Quader auf. Sein Volumen ist der Betrag des Produkts $x_1x_2x_3$. Vernünftigerweise setzt man also

$$\det \begin{pmatrix} x_1 & 0 & 0 \\ 0 & x_2 & 0 \\ 0 & 0 & x_3 \end{pmatrix} := x_1x_2x_3 \quad . \tag{24}$$

3. Es sei r eine Zahl. Das von $\vec{a}, \vec{b}, r\vec{c}$ aufgespannte Parallelepiped erhält man aus dem von $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ aufgespannten Parallelepiped, indem man die zu $\vec{c}$ gehörige Kante mit dem Faktor r streckt. Das geht natürlich auch mit jedem der beiden anderen Vektoren. Dementsprechend fordert man

$$\det(r\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) \;=\; \det(\vec{a}, r\vec{b}, \vec{c}) \;=\; \det(\vec{a}, \vec{b}, r\vec{c}) \;=\; r\det(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) \tag{25}$$

für alle $r \in \mathbb{R}$.

4. Die nächste Forderung ist, dass

$$\det(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}_1 + \vec{c}_2) \ = \det(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}_1) \ + \ \det(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}_2) \tag{26}$$

sein soll, und Entsprechendes gilt auch für die beiden anderen Vektoren. Das ist leicht nachvollziehbar. Man baut zwei Parallelepipede mit der gleichen Grundfläche zusammen.

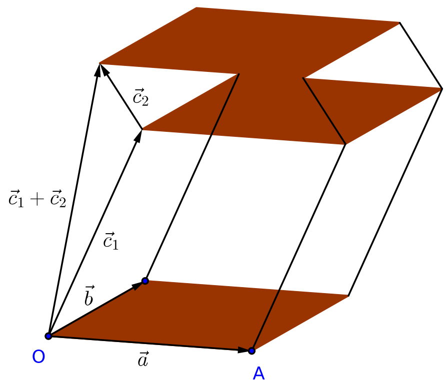


Abbildung 43: Zu Gleichung (26)

5. Schließlich verlangt man, dass

$$\det(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} + r\vec{a} + s\vec{b}) \ = \ \det(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) \tag{27}$$

gelten soll für alle $r, s \in \mathbb{R}$. Das ist, wenn man es recht bedenkt, auch einleuchtend. Der Vektor $\vec{c} + r\vec{a} + s\vec{b}$ ist Ortsvektor eines Punktes in der Ebene, die parallel zur Grundfläche ist und die durch C geht. Hier schaut das Prinzip von Cavalieri um die Ecke! – Da Ansichtssache ist, welche Fläche man als Grundfläche ansehen will, gelten entsprechende Regeln auch für die beiden anderen Vektoren.

Nun kann man eine Funktion Theo auf Matrizen einführen und eine lange Liste von Forderungen aufstellen, die diese Funktion erfüllen soll. Dann ist aber offen, ob es eine Funktion mit den postulierten Eigenschaften überhaupt gibt. In unserem Fall haben die Mathematiker nachgewiesen, dass es eine Funktion det mit den oben notierten Eigenschaften gibt und dass sie durch diese Eigenschaften auch eindeutig bestimmt ist. Das vollziehen wir nicht nach, davon hättest du wenig. Du kannst deine Zuversicht darauf gründen, dass die Sache funktionieren sollte, wenn $\det(M)$ das Volumen des Parallepipeds ist, das von den Spaltenvektoren von M aufgespannt wird. Dann bleibt bloß noch das seltsame Phänomen zu deuten, dass die Determinante negative Werte annehmen kann.

Wir notieren zwei Regeln für die Determinante:

9 Lemma
Es sei $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in \mathbb{R}^3$. Dann gilt:

$$\det(\vec{a}, \vec{b}, \vec{0}) \ = \ 0 \qquad \textit{und} \tag{28}$$

$$\det(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) \ = \ -\det(\vec{b}, \vec{a}, \vec{c}) \ . \tag{29}$$

In Worten: Ist eine Spalte der Nullvektor, ist der Wert der Determinante 0, und vertauscht man zwei Spalten, erhält die Determinante den Faktor -1.

7.2 Einige Aufgaben

1. Berechne
$$\det\begin{pmatrix}1 & 2 & 2\\ 1 & 2 & -1\\ 2 & 0 & 0\end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \det\begin{pmatrix}2 & 1\\ 5 & 3\end{pmatrix} \quad .$$

2. Die Abbildung 43 kann man mit etwas Mühe auch als Illustration zu Gleichung (27) verwenden. Erkläre!

3. Begründe formal und anschaulich, dass $\det(\vec{a}, \vec{b}, \vec{b}) = 0$ ist.

8 Klausur Nr. 6 am 26. November 2015

1. **Raumgeometrie.** Gegeben seien die Raumpunkte $A(1|3|2)$, $B(2|2|3)$ und $C(7|1|2)$ und natürlich der Nullpunkt $O(0|0|0)$.

   (a) Notiere eine Parameterdarstellung und eine Koordinatengleichung der Ebene E durch die Punkte A, B und C. [Kontrollergebnis: $E:\ 2x+6y+4z=28$] [10]

   (b) Zeige, dass der Punkt $P(6|1|2,5)$ in der Ebene E liegt, und untersuche, ob er zum Dreieck ABC gehört. [13]

   (c) Bestimme den Punkt, den man erhält, wenn man den Nullpunkt an der Ebene E spiegelt. [8]

   (d) Wie groß ist der Innenwinkel α des Dreiecks ABC? [8]

   (e) Berechne die Höhe des Tetraeders mit der Grundfläche ABC und der Spitze O. [4]

   (f) Der Punkt C soll durch einen Punkt C' auf der Parallelen zu AB durch C ersetzt werden, der von A und von B gleich weit entfernt ist. Schreibe einen Ansatz für die Bestimmung von C' hin oder beschreibe wenigstens einen Lösungsweg – die Berechnung selbst ist nicht verlangt. [12]

   (g) Kannst du etwas darüber sagen, wie sich die Volumina der Tetraeder $ABCO$ und $ABC'O$ verhalten, ohne die Volumina auszurechnen? [8+]

   (h) Berechne $\det(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ und gib Auskunft, was die Zahl bedeutet. [10]

   (i) Berechne den Abstand der Geraden AB von der x–Achse. [12]

2. **Platonische Körper.** Wie du weißt, bilden die Raumpunkte mit den Ortsvektoren $\pm\vec{e}_1, \pm\vec{e}_2$ und $\pm\vec{e}_3$ die Ecken eines Oktaeders.

   (a) Begründe kurz, dass auch die Punkte $(0|0|0)$, $(0|0|2)$, $(\pm1|0|1)$, $(0|\pm1|1)$ Eckpunkte eines Oktaeders sind. [4]

   (b) Fertige eine Zeichnung an: Nimm als Bilder der Einheitsvektoren die Punkte $(5|0)$, $(4|3)$ und $(0|5)$ der Zeichenebene [Einheit dort: 1 cm]. Notiere auch die Matrix für die Umrechnung der räumlichen Koordinaten in die Koordinaten der Zeichenebene. Nimm für die Zeichnung selbst eine Seite deines Hefts und schreibe die (räumlichen) Koordinaten an die Eckpunkte des Oktaeders. – Über dieses Oktaeder geht der Rest der Aufgabe. [11]

   (c) Die xy–Ebene werde um die x–Achse gedreht. Beschreibe, welche Schnittgebilde mit dem Oktaeder auftreten. [8]

   (d) Gib eine Parametrisierung der Ebenenschar der letzten Teilaufgabe an, also so etwas wie $E_a : \ldots$. [6+]

   (e) Begründe, dass die Punkte $(0|0|0)$, $(1|1|0)$, $(1|0|1)$ und $(0|1|1)$ die Eckpunkte eines (regelmäßigen) Tetraeders sind, und ergänze das Tetraeder in deiner Zeichnung. [10]

   (f) Welche Fläche haben Tetraeder und Oktaeder gemeinsam? [Die kannst du so hinschreiben, rechne nichts] [4]

   (g) Am Modell sieht es so aus, als setzten drei Tetraederflächen die Oktaederflächen, mit denen sie (nur) eine Kante gemeinsam haben, ohne Knick fort. Kläre für ein Flächenpaar exakt, ob an der Kante wirklich kein Knick ist. [12]

3. **Ein paar schräge Sachen.**

(a) Durch die Menge

$$\left\{ \begin{pmatrix} \cos(t) \\ 1 \\ \sin(t) \end{pmatrix} \,\middle|\, 0 \leq t < 2\pi \right\}$$

ist geometrisch eine Kreislinie gegeben. Gib den Mittelpunkt und den Radius des Kreises an und die Ebene, in der der Kreis liegt. [6]

(b) Was bedeuten die folgenden Mengen geometrisch? [12]

$$M_1 = \left\{ \begin{pmatrix} \cos(t) \\ y \\ \sin(t) \end{pmatrix} \,\middle|\, 0 \leq t < 2\pi,\ 0 \leq y \leq 1 \right\}$$

$$M_2 = \left\{ r \begin{pmatrix} \cos(t) \\ 1 \\ \sin(t) \end{pmatrix} \,\middle|\, 0 \leq t < 2\pi,\ \ 0 \leq r \right\}$$

(c) Berechne den Winkel zwischen der Ebene $E_1 :\ 4x - 2y - 4z = 0$ und der xy–Ebene. [8]

(d) Der Punkt $P(1|2|3)$ liegt auf einer Kugel um den Nullpunkt. Gib den Radius r der Kugel an und schreibe ihre Gleichung hin. [6]

(e) Es sei P der Punkt der vorigen Teilaufgabe. Welches geometrische Objekt ist durch die Gleichung

$$\vec{p} * \vec{x} \ = \ \vec{p} * \vec{p}$$

gegeben und was hat es mit der Kugel zu tun? [8]

(f) Schließlich suchen wir noch eine Matrixabbildung des Raumes, die die Vektoren $\vec{e}_1$ und $\vec{e}_2$ unverändert lässt und die den Ortsvektor des Punktes $(1|-2|1)$ in den Vektor $\vec{e}_3$ abbildet. Stelle die Matrix auf. Und wenn du eine Ahnung hast, was die Abbildung mit dem Raum anstellt, kannst du dies gern beschreiben; es entstehen dir aber keine Nachteile, wenn du das nicht machst. [4+]

9 Basis, Dimension, Lineare Unabhängigkeit

9.1 Fahrplan

Nun sollst du etwas über die Struktur von Vektorräumen erfahren. Dabei beginne ich nicht mit einer allgemeinen Definition eines Vektorraums, das brächte dir vermutlich wenig. Wir sehen uns das Wesentliche im vertrauten $\mathbb{R}^n$ an und verwenden geometrische Interpretationen, das wird dir das Verstehen erleichtern. Meilensteine an unserem Weg sind die Begriffe Linearkombination, Erzeugnis, Erzeugendensystem, Basis als minimales Erzeugendensystem und Dimension als Anzahl der Elemente eines solchen. Du wirst wieder Matrixabbildungen begegnen und ein paar fremdartige Beispiele für Vektorräume sehen, damit du nicht denkst, Vektorraum sei nur ein anderes Wort für den $\mathbb{R}^n$ – das wäre viel zu eng. Der Begriff des Vektorraums gehört zu den zentralen Begriffen der Mathematik, und Vektorräume kommen praktisch überall dort vor.

9.2 Darstellung eines Vektors als Linearkombination

Es seien n feste Vektoren $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n \in \mathbb{R}^m$ gegeben. Nun will man einen Vektor $\vec{b} \in \mathbb{R}^m$ als **Linearkombination** der $\vec{a}_k$ schreiben, das heißt, man sucht Zahlen $r_1, r_2, \ldots, r_n$ so, dass

$$\vec{b} \ = \ r_1\vec{a}_1 + r_2\vec{a}_2 + \ldots + r_n\vec{a}_n \ = \ \sum_{k=1}^{n} r_k\vec{a}_k$$

ist.

Technisch gesehen ist das eine alte Jacke; da steht ja nur das $m \times n$–LGS

$$A\vec{x} \ = \ \vec{b} \ ,$$

wobei $A = (\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n)$ die Matrix mit den Spaltenvektoren $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n$ ist. Inhaltlich begegnet uns das Problem zum Beispiel in folgenden Kontexten.

1. Man will wissen, ob der Fußpunkt F des Lotes von der Spitze S einer Pyramide im Raum mit Grundfläche ABC auf die Ebene E durch die Grundfläche innerhalb des Dreiecks liegt. Den Ortsvektor $\vec{f}$ von F berechnet man, wie immer, mit der Normalengleichung von E. Jetzt muss man den Vektor $\vec{f} - \vec{a}$, der von A zu F zeigt, als Linearkombination
$$\overrightarrow{AF} \ = \ \vec{f} - \vec{a} \ = \ r\overrightarrow{AB} + s\overrightarrow{AC}$$
schreiben. Die Größe von r und s verrät, wo F relativ zum Dreieck ABC liegt. Im Dreieck liegt F dann und nur dann, wenn $0 \leq r, s$ und $r + s \leq 1$ ist – siehe Abbildung 44 auf Seite 71. Für den dort eingezeichneten Punkt F ist $1 < r < 2$ und $0 < s < 1$.

2. Man hat eine Matrixabbildung $\varphi: \ \vec{x} \mapsto A\vec{x}$, und man sucht zu einem vorgegebenen Bildvektor $\vec{b}$ ein Urbild $\vec{x}$ mit $A\vec{x} = \vec{b}$.

3. Man sucht eine Matrixabbildung, die etwas Bestimmtes leistet. Konkretes Beispiel: Der Vektor $\vec{v} = \binom{1}{2}$ soll fest bleiben und der Vektor $\vec{w} = \binom{-2}{1}$ soll auf $\vec{w} + \vec{v}$ abgebildet werden.[17] Wie du weißt, stehen in den Spalten der

[17] Das ist eine Scherung der Ebene, Scherachse ist die von $\vec{v}$ erzeugte Gerade.

Matrix die Bilder der Einheitsvektoren. Man schreibt die Einheitsvektoren als Linearkombinationen von $\vec{v}, \vec{w}$. Ist

$$\vec{e}_1 \;=\; r\vec{v} + s\vec{w} \quad ,$$

dann ist

$$r\vec{v} + s(\vec{v} + \vec{w})$$

der Bildvektor von $\vec{e}_1$, also der erste Spaltenvektor der gesuchten Matrix.

Anmerkung: Die beiden LGS mit den rechten Seiten $\vec{e}_1$ und $\vec{e}_2$ löst man simultan; die nötigen Zeilenumformungen hängen ja nur von der linken Seite ab. Das LGS hat die Form

$$\vec{v}\ \vec{w} \mid \vec{e}_1\ \vec{e}_2$$

mit zwei rechten Seiten.

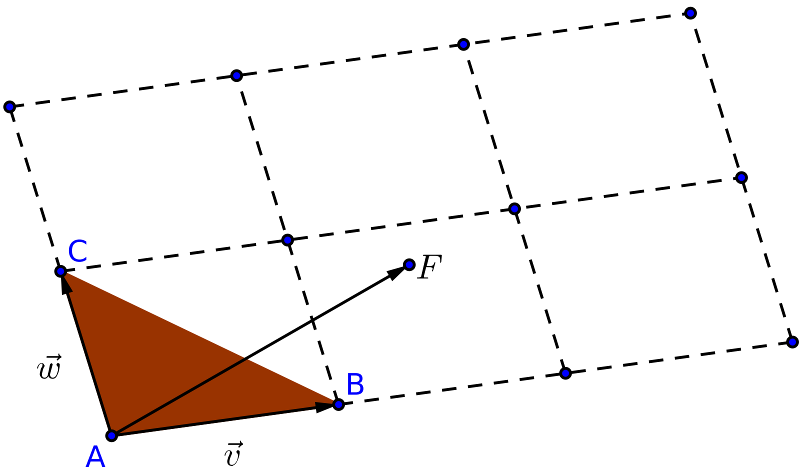


Abbildung 44: Wo liegt der Punkt F? (Zu Nr. 1 auf Seite 70)

9.3 Erzeugnisse

Das Erzeugnis einer (endlichen) Menge von Vektoren ist die Menge aller Linearkombinationen, die man aus diesen Vektoren bilden kann. Natürlich müssen die Vektoren von der gleichen Sorte sein, also aus dem gleichen Vektorraum, zum Beispiel aus dem $\mathbb{R}^m$. Für diesen Fall schreibe dir eine formale Definition auf:

10 Definition
Für n Vektoren $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_n \in \mathbb{R}^m$ ist das **Erzeugnis** $\langle\, \vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_n \,\rangle$ *dieser Vektoren die Menge*

$$\langle\, \vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_n \,\rangle \;:=\; \left\{ \sum_{k=1}^{n} r_k \vec{v}_k \;\middle|\; r_1, r_2, \ldots, r_n \in \mathbb{R} \right\} \quad .$$

Das System $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_n$ der Vektoren nennt man ein **Erzeugendensystem** *der Menge.*

Beispiel. Es seien $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ die drei Einheitsvektoren des $\mathbb{R}^3$. Dann ist $\langle\, \vec{e}_1 \,\rangle$ die x–Achse, $\langle\, \vec{e}_1, \vec{e}_2 \,\rangle$ die xy–Ebene und $\langle\, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3 \,\rangle$ der ganze Raum $\mathbb{R}^3$. Klar? Probiere es mal aus und beschreibe die geometrische Bedeutung der folgenden Erzeugnisse:

$$\begin{aligned}
U_1 &:= \langle\, \vec{e}_1,\ \vec{e}_1 + \vec{e}_2 \,\rangle \\
U_2 &:= \langle\, 8\vec{e}_1 \,\rangle \\
U_3 &:= \langle\, \vec{e}_1 - \vec{e}_2,\ \vec{e}_1 + \vec{e}_2 \,\rangle \\
U_4 &:= \langle\, \vec{0} \,\rangle \\
U_5 &:= \langle\, \vec{e}_1,\ \vec{e}_2,\ \vec{e}_1 + \vec{e}_2 \,\rangle
\end{aligned}$$

Eigentlich sind Erzeugnisse alte Bekannte für dich. Die Lösungsmenge eines homogenen LGS ist ein Erzeugnis, und die Menge der Bildvektoren einer Matrixabbildung $\vec{x} \mapsto A\vec{x}$ ist das Erzeugnis der Spaltenvektoren der Matrix A, denn es gilt ja, wenn A eine $m \times n$–Matrix ist.

$$A\vec{x} \;=\; \sum_{k=1}^{n} x_k \vec{a}_k \quad .$$

Aufgaben

1. Löse die folgenden LGS und schreibe die Lösungsmenge als Erzeugnis.

$$\begin{pmatrix} 5 & 4 & 0 \\ 0 & 3 & 5 \end{pmatrix} \cdot \vec{x} \;=\; \vec{0} \qquad\qquad x + y + z \;=\; 0$$

2. Die durch

$$\vec{x} \mapsto \begin{pmatrix} 5 & 4 & 0 \\ 0 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \vec{x} \qquad \text{sowie die durch} \qquad \vec{x} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & -4 & 6 \\ 3 & 6 & -9 \end{pmatrix} \cdot \vec{x}$$

gegebene Matrixabbildung bildet den $\mathbb{R}^3$ in den $\mathbb{R}^3$ ab. Bestimme jeweils die Menge der Bildvektoren und schreibe sie als Erzeugnis mit möglichst wenigen erzeugenden Vektoren.

9.4 Abgeschlossenheit

Eine charakteristische Eigenschaft von Erzeugnissen ist ihre **Abgeschlossenheit**: Addiert man Vektoren eines Erzeugnisses oder bildet man von einem solchen Vektor ein Vielfaches, führt dies niemals aus dem Erzeugnis heraus. Ich formuliere die Angelegenheit konkret für den Spaltenraum.

11 Lemma
Es seien $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_n$ Vektoren des $\mathbb{R}^m$ und

$$U \;=\; \langle\, \vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_n \,\rangle$$

ihr Erzeugnis. Dann gelten die beiden folgenden Aussagen:

$$\begin{aligned} \vec{x}, \vec{y} \in U \;&\Rightarrow\; \vec{x} + \vec{y} \in U \\ \vec{x} \in U,\ r \in \mathbb{R} \;&\Rightarrow\; r\vec{x} \in U \end{aligned}$$

Schau dir an, wie man solche Aussagen beweist:

Beweis. Es sei $\vec{x}, \vec{y} \in U$. Dann gibt es Darstellungen

$$\vec{x} = \sum_{k=1}^{n} r_k \vec{v}_k \qquad \text{und} \qquad \vec{y} = \sum_{k=1}^{n} s_k \vec{v}_k$$

mit reellen Zahlen $r_1, r_2, \ldots, r_n$ und $s_1, s_2, \ldots, s_n$. Nun gilt

$$\begin{aligned} \vec{x} + \vec{y} \;&=\; \sum_{k=1}^{n} r_k \vec{v}_k \;+\; \sum_{k=1}^{n} s_k \vec{v}_k \\ &=\; \sum_{k=1}^{n} (r_k \vec{v}_k + s_k \vec{v}_k) \\ &=\; \sum_{k=1}^{n} (r_k + s_k) \vec{v}_k \quad , \end{aligned}$$

und das liegt offensichtlich in U. – Der Beweis der zweiten Aussage sei dir zur **Übung** überlassen. □

Geometrische Interpretation. Sind zum Beispiel A, B, C Punkte einer Ebene. dann bleibt man in der Ebene, wenn man den Punkt C um $\overrightarrow{AB}$ verschiebt oder wenn man A um $r\overrightarrow{AB}$ verschiebt. Aber Vorsicht: In der Geometrie zeichnen sich Ebenen durch den Nullpunkt durch nichts vor beliebigen Ebenen aus, aber **nur Ebenen durch den Nullpunkt gehören zu Erzeugnissen!** Addierst du zwei Ortsvektoren von Punkten einer Ebene, die nicht den Nullpunkt enthält, bist du sofort von der Ebene herunter. Anders gesagt: Nur Lösungsmengen homogener LGS sind Erzeugnisse, niemals die inhomogener LGS.

9.5 Aufgaben

Die Vektoren in diesen Aufgaben sind beliebige Spaltenvektoren des $\mathbb{R}^m$.

1. Zeige, dass
$$\langle\, \vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_n \,\rangle \;=\; \langle\, \vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_n + r\vec{v}_1 \,\rangle$$
ist für jedes $r \in \mathbb{R}$. [Tipp: Zeige, dass jedes Element der einen Menge auch zur anderen gehört und umgekehrt]

2. Zeige, dass
$$\langle\, \vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_n \,\rangle \;=\; \langle\, \vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_n + \sum_{k=1}^{n-1} r_k \vec{v}_k \,\rangle$$
ist für alle $r_1, r_2, \ldots, r_{n-1} \in \mathbb{R}$.

3. Siehst du eine geometrische Deutung der Aussagen der beiden letzten Aufgaben?

4. Zeige, dass der Nullvektor in jedem Erzeugnis enthalten ist.

5. Berechne die Lösungsmenge der Gleichung $x + y + z = 0$ und schreibe sie als Erzeugnis.

6. Berechne die Lösungsmenge der Gleichung $x + y + z = 4$ und zeige, dass man sie nicht als Erzeugnis schreiben kann. [Tipp: Ist der Nullvektor Lösung?]

7. Gib ein Erzeugendensystem des $\mathbb{R}^m$ an für $m = 1$, $m = 2$, $m = 3$, allgemein.

9.6 Lineare Unabhängigkeit

Wir wollen danach fragen, wie ein Erzeugnis von n Vektoren typischerweise aussieht. Knüpfen wir an Bekanntes an: In geometrischer Sprache ist das Erzeugnis
$$\langle\, \vec{v}_1 \,\rangle$$
eines Vektors $\vec{v}_1 \neq \vec{0}$ des $\mathbb{R}^3$ eine Gerade durch den Nullpunkt. Nimmt man nun einen Vektor $\vec{v}_2$ hinzu, der nicht zu der von $\vec{v}_1$ erzeugten Geraden gehört, ist das neue Erzeugnis
$$\langle\, \vec{v}_1, \vec{v}_2 \,\rangle$$
eine Ebene durch den Nullpunkt. Nimmt man einen dritten Vektor $\vec{v}_3$ hinzu, der nicht in der von $\vec{v}_1$ und $\vec{v}_2$ erzeugten Ebene liegt, ist das Erzeugnis
$$\langle\, \vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3 \,\rangle$$
der ganze Raum.

Liegt $\vec{v}_3$ doch in der von $\vec{v}_1$ und $\vec{v}_2$ erzeugten Ebene, dann ist auch das Erzeugnis der drei nur wieder die Ebene. An der Zahl der erzeugenden Vektoren kann man die wirkliche Größe des Erzeugnisses also nicht unbedingt ablesen; nur kann eben das Erzeugnis zweier Vektoren maximal eine Ebene durch den Nullpunkt sein.

So weit, so gut. Wir wenden uns nun dem allgemeinen Fall zu und fragen nach der „Größe“ des Erzeugnisses

$$U \;=\; \langle\, \vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_n \,\rangle$$

von n Vektoren des $\mathbb{R}^m$.

Natürlich könnten wir wie oben vorgehen, mit dem Erzeugnis von $\vec{v}_1$ beginnen, dann $\vec{v}_2$ hinzunehmen, wenn $\vec{v}_2$ nicht im Erzeugnis von $\vec{v}_1$ liegt, und $\vec{v}_2$ andernfalls weglassen, dann mit $\vec{v}_3$ fortfahren und so weiter, bis wir schließlich $\vec{v}_n$ verarbeitet haben. So erhalten wir ein **minimales** Erzeugendensystem von U. Aber die Sache hat zwei Nachteile. Der erste ist dir vielleicht schleierhaft, aber ich führe ihn an: Wir arbeiten in einer bestimmten Reihenfolge. Was ist, wenn man die Reihenfolge der $\vec{v}_k$ verändert und von vorn beginnt? Kommt dann dasselbe Ergebnis heraus? Ich kann dich beruhigen, falls das nötig sein sollte: ja, kommt es. Der zweite Nachteil wird dir mehr einleuchten: Die Sache ist ziemlich viel Arbeit. Falls alle $\vec{v}_k$ drin bleiben, musst du ein $m\times 1$–LGS, ein $m\times 2$–LGS und so weiter bis zu einem $m\times(n-1)$–LGS lösen.

Es gibt einen besseren Weg, der von vornherein alle $\vec{v}_k$ gleich behandelt. Wenn ich sehen will, ob es unter den erzeugenden Vektoren überflüssige gibt, schreibe ich eine Linearkombination der $\vec{v}_k$ hin, die den Nullvektor ergibt:

$$\sum_{k=1}^{n} r_k \vec{v}_k \;=\; \vec{0} \tag{30}$$

oder, ausgeschrieben,

$$r_1\vec{v}_1 + r_2\vec{v}_2 + \ldots + r_n\vec{v}_n \;=\; \vec{0}\;\; . \tag{31}$$

Da steht jetzt ein homogenes $m \times n$–LGS. Wenn es **nur** die Lösung

$$r_1 = r_2 = \ldots = r_n = 0$$

gibt, dann ist auch kein $\vec{v}_k$ eine Linearkombination der übrigen. Gibt es eine Lösung des LGS, bei der ein $r_k \neq 0$ ist, kann ich die Gleichung nach $\vec{v}_k$ auflösen, und damit ist $\vec{v}_k$ in dem Fall überflüssig und kann weggelassen werden.

An der Lösungsmenge des homogenen Systems kann ich genau sehen, wieviele der $\vec{v}_k$ überflüssig sind und welche, aber das schauen wir uns später an. Hier kommt jetzt die Definition des zentralen Begriffs:

12 Definition
Ein System $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_n$ von Vektoren des $\mathbb{R}^m$ heißt **linear unabhängig**, *wenn die Vektorgleichung*

$$\sum_{k=1}^{n} r_k \vec{v}_k \;=\; r_1\vec{v}_1 + r_2\vec{v}_2 + \ldots + r_n\vec{v}_n \;=\; \vec{0}$$

nur *die Lösung $r_1 = r_2 = \ldots = r_n = 0$ hat.*

Damit ist ein Erzeugendensystem genau dann minimal, wenn das System der erzeugenden Vektoren linear unabhängig ist. Und ein miniales Erzeugendensystem heißt **Basis** seines Erzeugnisses.

9.7 Die Dimension eines Erzeugnisses

Ist das System $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_n$ von Vektoren (des $\mathbb{R}^m$) nicht linear unabhängig, nennt man es **linear abhängig**. Das ist eigentlich ja selbstverständlich, aber ich will es klar aussprechen.

Von zentraler Bedeutung ist der folgende Satz.

13 Satz
Es sei sei U Erzeugnis von n Vektoren (des $\mathbb{R}^m$). Dann ist jedes System von $n+1$ Vektoren aus U linear abhängig.

Der Beweis ist nicht sehr tiefsinnig, man muss den Nullvektor als Linearkombination der $n+1$ Vektoren schreiben und an dieser Linearkombination herumschrauben, bis man sieht, dass es einen Vorfaktor $\neq 0$ geben muss. Das Herumschrauben ist aber technisch nicht ohne; ich weiß noch nicht, ob ich das im Unterricht mache, denn den meisten von euch wird es vermutlich nichts bringen. Die wesentliche Idee des Beweises wird aber schon deutlich, wenn man einen Spezialfall des Satzes beweist:

14 Lemma
Ein System von $m+1$ Vektoren des $\mathbb{R}^m$ ist stets linear abhängig.

Beweis. Es seien $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_{m+1} \in \mathbb{R}^m$. Wir machen den üblichen Test auf lineare Unabhängigkeit und setzen

$$\sum_{k=1}^{m+1} r_k \vec{v}_k \;=\; r_1\vec{v}_1 + r_2\vec{v}_2 + \ldots + r_{m+1}\vec{v}_{m+1} \;=\; \vec{0} \quad .$$

Jetzt müssen wir nur noch scharf hinschauen: Vor uns steht ein LGS, das eine Spalte mehr hat als Zeilen. Selbst wenn bei der Durchführung des Gaußschen Algorithnus keine Zeile wegfällt, entstehen nur m Stufen mit $m+1$ Spalten: mindestens eine Variable ist frei wählbar, meinetwegen r_k. Also gibt es eine Lösung, bei der nicht alle r_j den Wert Null haben: das System ist linear abhängig. □

Nach diesen Vorbereitungen können wir sagen, was die Dimension eines Erzeugnisses ist: Es sei U ein Erzeugnis von n Vektoren des $\mathbb{R}^m$, also

$$U \;=\; \langle\, \vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_n \,\rangle \quad .$$

Überflüssige Vektoren können wir weglassen, also gehen wir davon aus, dass das Erzeugendensystem minimal ist, die Vektoren folglich ein linear unabhängiges System bilden.

Es sei nun $\vec{w}_1, \vec{w}_2, \ldots, \vec{w}_j$ ein zweites linear unabhängiges Erzeugendensystem von U. Dann ist $j \leq n$, denn jedes System von mehr als n Vektoren aus U ist nach dem Satz linear abhängig. Nun vertauschen wir die Rollen und erhalten ebenso, dass $n \leq j$ ist. Es folgt $n = j$. Damit ist gezeigt, dass jedes linear unabhängige Erzeugendensystem von U die gleiche Anzahl von Vektoren enthält. Anders gesagt: **Jede Basis von U hat die gleiche Anzahl von Vektoren!** Diese gemeinsame Anzahl von Basisvektoren heißt die **Dimension** von U, das Symbol dafür ist $\dim(U)$.

9.8 Aufgaben

1. Schaue dir den Beweis von Lemma 14 genau an, bis du meinst, ihn verstanden zu haben.[18] Beweise dann konkret, dass die Spaltenvektoren der Matrix

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & -1 \\ 2 & 1 & -3 & 2 \\ -3 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

   linear abhängig sind.

2. Bestimme a so, dass die Spaltenvektoren der Matrix

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -1 & -3 & 2 \\ 2 & 4 & a \end{pmatrix}$$

   linear unabhängig sind. Interpretiere dein Ergebnis geometrisch.

3. Es sollte untersucht werden, ob ein gegebenes System $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3, \vec{v}_4, \vec{v}_5$ von Vektoren des $\mathbb{R}^5$ linear unabhängig ist. Nach dem Anwenden des Gaußchen Algorithmus auf den üblichen Ansatz kam dieses LGS heraus:

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & -3 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & 5 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

   Welche Dimension hat das Erzeugnis des Systems? Welche der $\vec{v}_j$ sind garantiert überflüssig? Gib eine minimales Erzeugendensystem an!

4. Wenn $m+1$ Vektoren des $\mathbb{R}^m$ linear abhängig sein müssen, dann sind natürlich erst recht $m+2, m+3, \ldots$ Vektoren des $\mathbb{R}^m$ linear abhängig. Versuche einmal, eine harte Begründung dieser Aussage zu finden.

5. Zeige, dass die Einheitsvektoren $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_m$ des $\mathbb{R}^m$ linear unabhängig sind.

6. Es sei $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_n$ ein linear unabhängiges System von Vektoren des $\mathbb{R}^m$. Zeige, dass dann folgendes gilt: Aus

$$r_1\vec{v}_1 + r_2\vec{v}_2 + \ldots + r_n\vec{v}_n \;=\; s_1\vec{v}_1 + s_2\vec{v}_2 + \cdots + s_n\vec{v}_n$$

   folgt

$$r_1 = s_1,\; r_2 = s_2,\; \ldots,\; r_n = s_n \quad .$$

   In anderen Worten: Man kann jeden Vektor des Erzeugnisses einer Basis auf eine und nur auf eine Weise als Linearkombination dieser Basis schreiben. Linearkombinationen, die sich unterscheiden, stellen auch unterschiedliche Vektoren dar. Bei einem linear abhängigen Erzeugendensystem gilt dies **nicht**. [Anleitung: Dies ist ein Mausefallenbeweis. Wer es richtig macht, braucht nur eine Umformung, dann steht das Ergebnis da. Wer diese Umformung nicht sieht, läuft unter Umständen tagelang im Kreis.]

[18] Übrigens will ich nicht auf Dauer die Summen ausschreiben, ihr Profis könnt ja wohl das Summenzeichen lesen.

7. Schreibe die Aussage und den Beweis der vorigen Teilaufgabe vornehm mit Summenzeichen auf.

8. Du erinnerst dich an den Bauern Mecke mit seinen Düngermischungen – siehe Seite 19. Hier führte ein Mischungsproblem auf ein LGS mit der Koeffizientenmatrix

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0.06 & 0.01 & 0.04 & 0.03 \\ 0.01 & 0.03 & 0 & 0.04 \end{pmatrix} .$$

Führe dir noch einmal vor Augen, um was es ging, und bearbeite die folgenden Aufträge.

(a) Kann das System der Spaltenvektoren von M linear unabhängig sein?

(b) Dem guten Bauern Mecke ist das Phänomen Lineare Unabhängigkeit mindestens so rätselhaft wie Matthies und anderen hier. Dabei hätte es für Mecke handfeste Folgen, wenn die Spaltenvektoren von M ein linear unabhängiges System bildeten! Nämlich?

(c) Löse das LGS $M\vec{x} = \vec{0}$. Führe das jedenfalls per Hand durch, wenn du Trainingsbedarf hast. Man kann die Lösungsmenge auch am Ergebnis der Rechnungen auf Seite 19 ablesen!

(d) Sieh dir einen erzeugenden Vektor des Lösungsraums an. Daraus kannst du Erkenntnisse gewinnen, die für den Bauern Mecke durchaus von Interesse sind. Nämlich?

9. Die Vektoren $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_n$ des $\mathbb{R}^m$ seien alle von $\vec{0}$ verschieden und paarweise orthogonal. Beweise, dass sie dann ein linear unabhängiges System bilden.

10. Es sei

$$\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 0.06 \\ 0.01 \\ 0.04 \\ 0.03 \end{pmatrix}, \quad \vec{v}_3 = \begin{pmatrix} 0.01 \\ 0.03 \\ 0 \\ 0.04 \end{pmatrix}$$

und $V = \langle \vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3 \rangle$.

(a) Bestimme die Dimension von V.

(b) Berechne den **Orthogonalraum** $V_\perp$ von V, definiert durch

$$V_\perp := \{ \vec{x} \in \mathbb{R}^4 \mid \vec{x} * \vec{v} = 0 \text{ für alle } \vec{v} \in V \} .$$

(c) Berechne auch den Orthogonalraum von $\langle \vec{v}_1 \rangle$.

9.9 Orthogonalbasen

Nehmen wir an, du sollst einen gegebenen Vektor $\vec{x} \in \mathbb{R}^{13}$ als Linearkombination eines Systems $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_{10}$ von Vektoren des $\mathbb{R}^{13}$ darstellen. Eine schöne Bescherung, die Sache läuft auf die Lösung eines 13×10–LGS hinaus, und die ist im allgemeinen Fall per Hand nicht zu leisten. Sehr einfach wird die Sache dagegen, wenn die $\vec{v}_k$ paarweise orthogonal sind, denn dann kannst du die Koeffizienten r_k des Ansatzes

$$\vec{x} \; = \; \sum_{k=1}^{10} r_k \vec{v}_k$$

ganz leicht berechnen, indem du beide Seiten der Gleichung skalar mit $\vec{v}_k$ multiplizierst. Rechts fallen alle Summanden außer $r_k(\vec{v}_k * \vec{v}_k)$ weg, links steht $\vec{x} * \vec{v}_k$, es bleibt also bloß noch

$$\vec{x} * \vec{v}_k \; = \; r_k(\vec{v}_k * \vec{v}_k) \quad ,$$

und daraus ergibt sich leicht[19]

$$r_k \; = \; \frac{\vec{x} * \vec{v}_k}{\vec{v}_k * \vec{v}_k} \quad \text{für } k = 1, 2, \ldots, 10.$$

Das ist schön, aber findet man für jedes Erzeugnis eine Basis aus paarweise orthogonalen Vektoren? Ja, findet man, und es gibt dafür sogar einen schönen Algorithmus, der gut zu dem passt, was wir gelernt haben. Ich zeige dir, wie es geht. Es sei also $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_n$ ein linear unabhängiges System von Vektoren des $\mathbb{R}^m$ und U ihr Erzeugnis. Wir wollen eine Basis $\vec{w}_1, \vec{w}_2, \ldots, \vec{w}_n$ von U konstruieren, deren Vektoren paarweise orthogonal sind. Das geht so:

$$\begin{aligned}
\vec{w}_1 &:= \vec{v}_1 \\
\vec{w}_2 &:= \vec{v}_2 - \frac{\vec{v}_2 * \vec{w}_1}{\vec{w}_1 * \vec{w}_1} \cdot \vec{w}_1 \\
\vec{w}_3 &:= \vec{v}_3 - \frac{\vec{v}_3 * \vec{w}_1}{\vec{w}_1 * \vec{w}_1} \cdot \vec{w}_1 - \frac{\vec{v}_3 * \vec{w}_2}{\vec{w}_2 * \vec{w}_2} \cdot \vec{w}_2 \\
&\vdots \\
\vec{w}_n &:= \vec{v}_n - \sum_{k=1}^{n-1} \frac{\vec{v}_n * \vec{w}_k}{\vec{w}_k * \vec{w}_k} \cdot \vec{w}_k
\end{aligned}$$

Man zerlegt praktisch jedes $\vec{v}_k$ in eine Summe. Ein Summand liegt im Erzeugnis von $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_{k-1}$, der zweite Summand ist orthogonal zu diesem Erzeugnis, und den nimmt man als neuen Basisvektor. Die Zerlegung ist eindeutig! Einen Spezialfall dieser Methode kennst du schon lange: die orthogonale Zerlegung; bei der Bildung von $\vec{w}_2$ wendet man sie in Reinform an.

Dieses Verfahren heißt **Gram–Schmidtsches Orthogonalisierungsverfahren**, es ist wirklich clever. Die $\vec{w}_k$ bilden tatsächlich ein linear unabhängiges System von n Vektoren aus U, also eine Basis von U und die $\vec{w}_k$ sind paarweise orthogonal zu einander.

[19]Sollten welche der $\vec{v}_k$ gleich dem Nullvektor sein, lässt man diese natürlich weg.

Aufgaben

1. Wende das Verfahren auf das System

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} , \quad \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} , \quad \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$$

   des $\mathbb{R}^4$ an.

2. Kann bei dem Verfahren ein $\vec{w}_k = \vec{0}$ werden?

3. Zeige, dass

$$|\vec{w}_k| \ \leq \ |\vec{v}_k| \quad \text{ist für } k = 1, 2, \ldots, n \ .$$

   [Tipp: überlege dir, dass aus $\vec{a} \perp \vec{b}$ stets $|\vec{a}| \leq |\vec{a} + \vec{b}|$ folgt]

9.10 Grundsätzliches zu LGS

Inzwischen hast du, wenn du deinen Pflichten nachgekommen bist, genügend Praxis mit LGS. Du hast damit typische Fragestellungen behandelt und eine ganze Reihe auch praktisch durchgerechnet. Dann ist es an der Zeit, dass ich dir die Theorie einmal dicht zusammenschreibe.

Es sei also A eine $m \times n$–Matrix. Wir betrachten zunächst das **homogene** LGS

$$A\vec{x} = \vec{0} \quad .$$

Da $A\vec{0} = \vec{0}$ ist, ist seine Lösungsmenge $\mathbb{L}_0$ niemals leer. Sie ist $\{\vec{0}\}$, falls das System eindeutig lösbar ist, und sonst Erzeugnis von einem, zweien oder mehr linear unabhängigen Vektoren, eben so vielen, wie an frei wählbaren Parametern auftraten. Ist $n > m$, gibt es also mehr Spalten als Zeilen, bleiben in jedem Fall frei wählbare Parameter. Merksatz: **Die Lösungsmenge eines homogenen LGS ist stets ein Erzeugnis. Dessen Dimension ist gleich der Anzahl frei wählbarer Parameter.**

Schauen wir uns nun das inhomogene System

$$A\vec{x} = \vec{b} \quad \text{mit } \vec{b} \neq \vec{0}$$

an. Dessen Lösungsmenge $\mathbb{L}$ kann durchaus leer sein. Falls es aber eine Lösung gibt, also ein $\vec{y}_0 \in \mathbb{R}^n$ mit $A\vec{y}_0 = \vec{b}$, dann ist auch gleich $\vec{y}_0 + \vec{x}$ Lösung **für jede** Lösung $\vec{x}$ des homogenen Systems, denn für ein solches $\vec{x}$ gilt

$$A(\vec{y}_0 + \vec{x}) \;=\; A\vec{y}_0 + A\vec{x} \;=\; \vec{b} + \vec{0} \;=\; \vec{b} \quad .$$

Umgekehrt, ist $\vec{y}$ eine beliebige Lösung des inhomogenen Systems, dann ist $\vec{x} = \vec{y} - \vec{y}_0$ eine Lösung des homogenen Sysyems, denn

$$A\vec{x} \;=\; A(\vec{y} - \vec{y}_0) \;=\; A\vec{y} - A\vec{y}_0 \;=\; \vec{b} - \vec{b} \;=\; \vec{0} \quad .$$

Merksatz: **Die Lösungsmenge eines inhomogenen Systems $A\vec{x} = \vec{b} \neq \vec{0}$ ist leer oder von der Form**

$$\mathbb{L} \;=\; \{\, \vec{y}_0 + \vec{x} \,|\, A\vec{x} = \vec{0} \,\} \quad .$$

Damit die Luft nicht gar so dünn ist, bekommst du einige **Beispiele**.

1. Es sei $\vec{v} \neq \vec{0}$ ein Vektor des $\mathbb{R}^3$. Die Vektoren des $\mathbb{R}^3$, die zu $\vec{v}$ orthogonal sind, bilden die Menge
$$\langle\, \vec{v} \,\rangle_\perp \;=\; \{\, \vec{x} \in \mathbb{R}^3 \,|\, \vec{v} * \vec{x} = 0 \,\} \quad ,$$
geometrisch eine Ebene durch den Nullpunkt mit Normalenvektor $\vec{v}$. Das 1×3–LGS $\vec{v} * \vec{x} = 0$ kennst du ja zur Genüge.

2. Nimmst du zu dem $\vec{v}$ des vorigen Beispiels ein inhomogenes LGS $\vec{v} * \vec{x} = d \neq 0$, enthält die Lösungsmenge bekanntlich alle Vektoren der Form
$$\vec{x}(r, s) \;=\; \vec{a} + r\vec{w}_1 + s\vec{w}_2$$
mit linear unabhängigem $\vec{w}_1, \vec{w}_2$. Klar, das ist eine Ebene mit Stützvektor $\vec{a}$ parallel zur Ebene $\langle \vec{w}_1, \vec{w}_2 \,\rangle$ durch den Nullpunkt. Und der Vektor $\vec{a}$ ist eine spezielle Lösung des inhomogenen Systems, und $\langle \vec{w}_1, \vec{w}_2 \rangle$ ist die Lösungsmenge des zugehörigen homogenen Systems.

3. Macht man das Gleiche mit einem $\vec{v} \neq \vec{0}$ aus einem beliebigen Raum $\mathbb{R}^n$, bekommt man im homogenen Fall als Lösungsmenge stets ein Gebilde, dessen Dimension um 1 kleiner ist als die Dimension n des ganzen Raums. Man spricht von einer **Hyperebene** des $\mathbb{R}^n$. Bei $n = 2$ zum Beispiel bekommt man eine Gerade durch den Nullpunkt, bei $n = 4$ etwas Raumartiges, also etwas, in dem man sich in drei unabhängigen Richtungen bewegen kann.

4. Es seien nun $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3$ linear unabhängige Vektoren des $\mathbb{R}^5$. Wir wollen

$$\langle \vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3 \rangle_\perp$$

berechnen. Ein Vektor, der zu allen drei Erzeugenden orthogonal ist, ist auch zum ganzen Erzeugnis orthogonal; wir müssen also das 3×5–LGS mit den Gleichungen

$$\vec{v}_1 * \vec{x} = 0, \quad \vec{v}_2 * \vec{x} = 0, \quad \vec{v}_3 * \vec{x} = 0$$

lösen. Wegen der vorausgesetzten Unabhängigkeit des Systems fällt keine Gleichung weg, wenn wir den Gaußschen Algorithmus durchführen. Wir erhalten drei Stufen und zwei frei wählbare Parameter. Die drei $\vec{v}_k$ erzeugen etwas Raumartiges im $\mathbb{R}^5$, orthogonal dazu ist eine Ebene. Das ist immer so: k linear unabhängige Vektoren des $\mathbb{R}^n$ erzeugen ein k–dimensionales Gebilde, die dazu orthogonalen Vektoren bilden ein $n-k$–dimensionales Gebilde. [Überlege mal, was dieses Gebilde für $k = n$ ist]

Rechenaufgaben

Gegeben seien die Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} .$$

Berechne jeweils die Mengen der Vektoren, die durch die durch A und B gegebenen Matrixabbildungen auf den Nullvektor abgebildet werden und die Mengen der Vektoren, die fest bleiben. [Anmerkung: Ein Vektor, der fest bleibt, heißt **Fixvektor**]

10 Ein großes Anwendungsbeispiel

Die Lineare Algebra ist nicht nur die Theorie des $\mathbb{R}^n$. Der $\mathbb{R}^n$ ist nur das Paradebeispiel eines Vektorraums, und du sollst nun einmal ein anderes wichtiges Beispiel eines Vektorraums sehen. Ferner soll dir eine Anwendung zeigen, wie weitreichend und wie fruchtbar die Theorie ist, in die wir hineingeschnuppert haben.

10.1 Vektorräume

Was braucht man für einen Vektorraum? Klar, eine Menge V von Vektoren. Vektoren müssen mit Pfeilen nicht das Geringste zu tun haben; in der Mathematik verlangt man nur, dass man damit rechnen kann, wie du es von den Spalten her gewohnt bist: man muss sie addieren können und man muss sie mit Zahlen multiplizieren können, und für diese Rechenarten müssen die vertrauten Regeln gelten.[20]

Das V, das wir uns nun anschauen wollen, ist eine Menge von Funktionen, die das Intervall $[0;\pi]$ in die reellen Zahlen abbilden. Ich will nicht alle Funktionen haben, sondern nur die stetigen oder, wenn dir das jetzt nichts sagt, die differenzierbaren. Ich notiere ein paar Beispiele – und zwar so, dass zu erkennen ist, dass wir sie als Vektoren ansehen wollen. Den gemeinsamen Definitionsbereich $[0,\pi]$ schreibe ich dabei nicht mit hin.

$$\begin{aligned}
\vec{f_1} &:= (x \mapsto x^2) \\
\vec{f_2} &:= (x \mapsto \sin(x)) \\
\vec{f_3} &:= (x \mapsto \sqrt{x+1}) \\
\vec{f_4} &:= (x \mapsto 1)
\end{aligned}$$

Dass man Funktionen addieren und mit reellen Zahlen multiplizieren kann, weißt du schon lange: denke an die Summenregel und an die Faktorregel aus der Differentialrechnung. Die sind hier auch wichtig: Summen und Vielfache von Vektoren müssen wieder Vektoren sein, und das klappt, weil Summen und Vielfache differenzierbarer Funktionen wieder differenzierbar sind. Ein paar Beispiele:

$$\begin{aligned}
5\vec{f_1} &= (x \mapsto 5x^2) \\
\vec{f_1} + \vec{f_4} &= (x \mapsto x^2 + 1) \\
4\vec{f_2} - 8\vec{f_3} &= (x \mapsto 4\sin(x) - 8\sqrt{x+1} \\
\langle\, \vec{f_1}, \vec{f_4}, (x \mapsto x)\,\rangle &= \{\, (x \mapsto ax^2 + bx + c) \mid a,b,c \in \mathbb{R}\,\}
\end{aligned}$$

Besondere Erwähnung verdient der **Nullvektor** unseres Vektorraums, nämlich

$$\vec{0} \;:=\; (x \mapsto 0) \;\in V \quad .$$

Gib acht: Eine Funktion kann im Intervall $[0,\pi]$ eine, mehrere oder meinetwegen unendlich viele Nullstellen haben, das reicht alles nicht, die Funktion $\vec{0}$ muss **jedes** $x \in [0,\pi]$ auf 0 abbilden.

Nun brauchen wir noch ein **Skalarprodukt** $*$, dann haben wir auch Längen, Winkel und Orthogonalität in unserem Vektorraum. Auch dafür haben sich die Mathematiker etwas Passendes ausgedacht – sieht zwar etwas fremd aus, funktioniert aber:

$$\vec{f} * \vec{g} \;:=\; \int_0^\pi f(x)g(x)\,dx \tag{32}$$

[20] Ich liste die Regeln hier nicht auf, sie stehen zum Beispiel in unserem Buch auf der Seite 222.

Kleine Übung. Berechne $\vec{f}_1 * \vec{f}_4$, $|\vec{f}_3|$ und $|\vec{f}_1 - \vec{f}_4|$.

Die Zahlen, die ihr da ausgerechnet habt, sagen nicht das Geringste über die Graphen der Funktionen aus, die könnt ihr nicht an den Graphen ablesen. Allerdings gilt[21] in V:

$$|\vec{f}| \;=\; 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{f} \;=\; \vec{0} \tag{33}$$

Mehr dazu erfährst du in den Aufgaben unten.

10.2 Das Erzeugnis der $\vec{v}_k = (x \mapsto \sin(kx))$ für $k = 1, 2, \ldots$

Für jede Zahl $k = 1, 2, 3, \ldots$ liegt $\vec{v}_k \;:=\; (x \mapsto \sin(kx))$ in unserem Vektorraum V. Diese Vektoren $\vec{v}_k$ haben erstaunliche Eigenschaften. Zum einen ist – unabhängig von k –

$$|\vec{v}_k| \;=\; \sqrt{\frac{\pi}{2}} \;, \tag{34}$$

zum anderen ist

$$\vec{v}_k * \vec{v}_j \;=\; 0 \quad \text{für } k \neq j \;, \tag{35}$$

die $\vec{v}_k$ sind paarweise orthogonal und $\neq \vec{0}$ und damit linear unabhängig. In V gibt es ein unendliches System, das linear unabhängig ist, die **Dimension von V muss unendlich sein!**

10.3 Endliche Fourierreihen

Wir setzen

$$U_n := \langle \vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_n \rangle \quad \text{für } n = 1, 2, 3, \ldots$$

mit unseren $\vec{v}_k = (x \mapsto \sin(kx))$ und nehmen eine konkrete Funktion $\vec{f} \in V$ her, und zwar

$$\vec{f} = (x \mapsto x^3(\pi - x)) \quad .$$

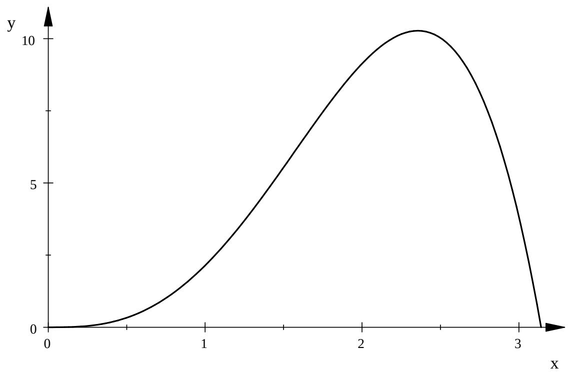


Abbildung 45: Der Graph von $\vec{f} = (x \mapsto x^3(\pi - x))$

Dann können wir $\vec{f}$ zerlegen in eine Summe eines Vektors aus U_n und eines Vektors, der zu U_n orthogonal ist. Es versteht sich keineswegs von selbst, dass dabei etwas Vernünftiges herauskommt, im Gegenteil, der Ansatz ist eine außerordentlich clevere Idee eines Joseph Fourier. Schauen wir uns die Sache an! Der Summand, der in U_n liegt, ist von der Form

$$\vec{u}_n \;=\; r_1\vec{v}_1 + r_2\vec{v}_2 + \ldots + r_n\vec{v}_n \quad ,$$

und die Vorfaktoren r_k sind relativ leicht zu haben:

$$r_k \;=\; \frac{\vec{f} * \vec{v}_k}{\vec{v}_k * \vec{v}_k}$$

„Relativ leicht“ sage ich, weil dir wohl die Puste ausginge, solltest du die Integrale im Zähler zu Fuß ausrechnen. Aber numerische Näherungswerte dafür sind mit MuPAD im Handumdrehen zu bekommen. Abbildung 46 zeigt den Graphen von $\vec{u}_5$ aus U_5, und der sieht dem Graphen von $\vec{f}$ erstaunlich ähnlich! In Abbildung 47 siehst du beide in einem Schaubild.

Die Güte der Näherung ist schon bei $n = 5$ überraschend gut, für größere n wird sie noch besser[22]. Zum Staunen ist auch, was sich ergibt, wenn man sich $\vec{u}_5$ über einem größeren Definitionsbereich zeichnen lässt – siehe Abbildung 48 auf Seite 86. Wenn man darüber nachdenkt, sieht man wohl, dass die Sache so ausgehen muss; die Graphen der $\vec{v}_k$ sind punktsymmetrisch zum Nullpunkt und periodisch mit der Periode 2π.

Bei den Beispielen $(x \mapsto x)$ und $(x \mapsto 1)$ muss man das n etwas größer machen, aber dann bekommt man die Ergebnisse, die in den Abbildungen 49 und 50 dargestellt sind.

[21] Um diese Beziehung zu haben, durfte ich nur die stetigen Funktionen in V aufnehmen.
[22] Das versuchen wir aber nicht zu beweisen.

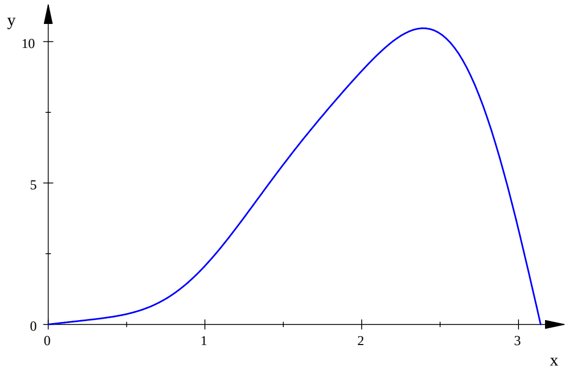


Abbildung 46: Der Graph der Projektion von $\vec{f} = (x \mapsto x^3(\pi - x))$ auf U_5

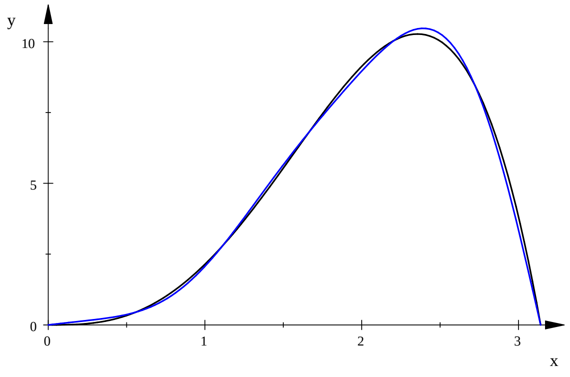


Abbildung 47: Die Graphen von $\vec{f}$ und der Projektion von $\vec{f}$ auf U_5

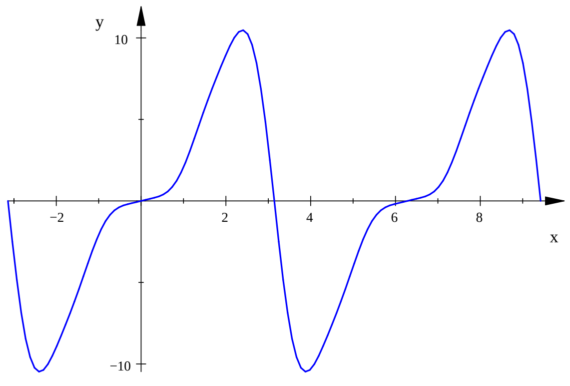


Abbildung 48: Der Graph von $\vec{u}_5$ über dem Intervall $[-\pi, 3\pi]$

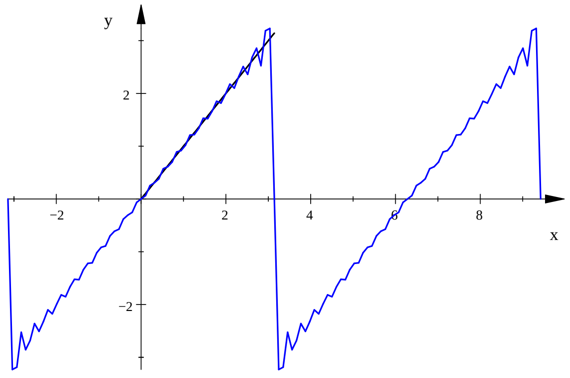


Abbildung 49: Näherung für $(x \mapsto x)$ mit $n = 20$ über dem Intervall $[-\pi, 3\pi]$

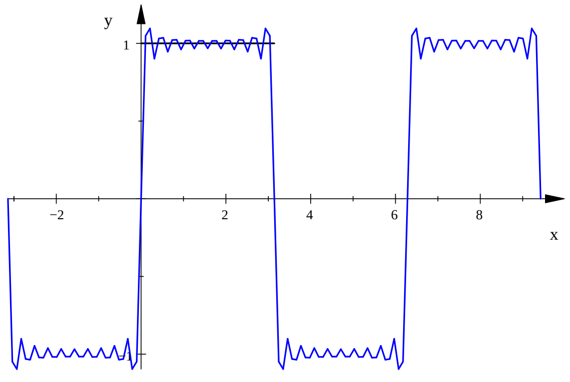


Abbildung 50: Näherung für $(x \mapsto 1)$ mit $n = 20$ über dem Intervall $[-\pi, 3\pi]$

10.4 Aufgaben

1. Die Zahlen
$$r_k \;=\; \frac{\vec{f} * \vec{v}_k}{\vec{v}_k * \vec{v}_k}$$
in der **endlichen Fourierreihe**
$$\sum_{k=1}^{n} r_k \vec{v}_k$$
heißen **Fourierkoeffizienten** von $\vec{f}$. Berechne die Fourierkoeffizenten von $\vec{f}_4 = (x \mapsto 1)$ und von $\vec{f}_5 = (x \mapsto x)$.

2. Es sei $\vec{f} = (x \mapsto f(x)) \;\in V$, und es sei $f(a) \neq 0$ für eine $a \in [0, \pi]$. Dann ist $f(a)^2 > 0$. Da mit f auch die Funktion $(x \mapsto f(x)^2)$ stetig ist, ist $f(x)^2 \approx f(a)^2$ für alle x, die genügend nahe bei a liegen. Insbesondere gibt es ein Stück des Intervalls $[0, \pi]$ um a so, dass
$$f(x)^2 \geq \frac{1}{2} f(a)^2$$
ist für alle x aus diesem Stück. Die Breite des Stücks ist eine positive Zahl δ. Der Beitrag des Stücks zum Integral
$$\vec{f} * \vec{f} \;=\; \int_0^{\pi} f(x)^2 \, dx$$
ist also mindestens
$$\delta \cdot \frac{1}{2} f(a)^2 \;>\; 0 \quad ,$$
das heißt, dass dieses Integral einen positiven Wert haben muss. Buchstabiere die Argumentation durch und mache dir klar, dass sie eine Begründung der Aussage (33) auf Seite 84 ist.

3. Lässt man die Voraussetzung der Stetigkeit fallen, gilt die Aussage (33) nicht mehr, wie dieses Beispiel hier zeigt:
$$f(x) \;=\; \begin{cases} 0 & \text{für } x \neq 1 \\ 1 & \text{für } x = 1 \end{cases}$$
Zeichne den Graphen von f und begründe, dass $\int_0^{\pi} f(x) \, dx \;=\; 0$ ist. [Beachte, dass hier $f(x) = f(x)^2$ ist!]

4. Zeige, dass für unsere $\vec{v}_k = (x \mapsto \sin(kx))$ folgendes gilt:
   (a) $\vec{v}_k * \vec{v}_k = \frac{\pi}{2}$ [partiell integrieren, trigonometrischen Pythagoras anwenden]
   (b) $\vec{v}_k * \vec{v}_j = 0$ für $k \neq j$ [zweimal gleichsinnig partiell integrieren]

5. Zur Güte der Näherung
   (a) Es seien $\vec{w}_1, \vec{w}_2, \ldots$ paarweise orthogonale Vektoren $\neq \vec{0}$. Zeige, dass dann
$$\begin{aligned}(r_1\vec{w}_1 + r_2\vec{w}_2 + \ldots + r_n\vec{w}_n) * (r_1\vec{w}_1 + r_2\vec{w}_2 + \ldots + r_n\vec{w}_n) \;&=\\ =\; r_1^2(\vec{w}_1 * \vec{w}_1) + r_2^2(\vec{w}_2 * \vec{w}_2) + \ldots + r_n^2(\vec{w}_n * \vec{w}_n)&\end{aligned}$$
   ist.

(b) Es sei nun $\vec{f}$ ein Vektor aus dem gleichen Vektorraum, aus dem die $\vec{w}_k$ sind. Dann kann man $\vec{f}$ bekanntlich als Summe

$$\vec{f} \;=\; \vec{u}_n + \vec{z}_n$$

schreiben, wobei

$$\vec{u}_n \in U_n := \langle \vec{w}_1, \vec{w}_2 \ldots, \vec{w}_n \rangle$$

und $\vec{z}_n \perp U_n$ ist. Rechne nach, dass $\vec{u}_n * \vec{u}_n + \vec{z}_n * \vec{z}_n = \vec{f} * \vec{f}$ ist; folglich ist $\vec{z}_n * \vec{z}_n \leq \vec{f} * \vec{f}$.

(c) Nimmt man jetzt den nächsten Vektor $\vec{w}_{n+1}$ zu den Erzeugenden von U_n hinzu und macht die entsprechende Zerlegung

$$\vec{f} \;=\; \vec{u}_{n+1} + \vec{z}_{n+1} \quad ,$$

ist $\vec{z}_n = \vec{z}_{n+1} + r_{n+1}\vec{w}_{n+1}$. Da $\vec{z}_{n+1}$ und $\vec{w}_{n+1}$ orthogonal sind, gilt wieder $\vec{z}_n * \vec{z}_n = \vec{z}_{n+1} * \vec{z}_{n+1} + r_{n+1}^2(\vec{w}_{n+1} * \vec{w}_{n+1})$. Das heißt, der Betrag des „Fehlervektors" $\vec{z}_n$ wird tendenziell kleiner, wenn man $\vec{w}_{n+1}$ hinzunimmt, jedenfalls aber nicht größer.

6. Zur Verdeutlichung der letzten Aufgabe im $\mathbb{R}^3$: Nimm $\vec{w}_1 = \vec{e}_1$, $\vec{w}_2 = \vec{e}_2$ und $\vec{f} = 4\vec{e}_1 + 3\vec{e}_2 + \vec{e}_3 \in \mathbb{R}^3$. Berechne $|\vec{f}|$, zerlege

$$\begin{aligned} \vec{f} &= \vec{u}_1 + \vec{z}_1 \quad \text{mit } \vec{u}_1 \in \langle \vec{w}_1 \rangle \text{ und } \vec{z}_1 \perp \vec{u}_1 \\ &= \vec{u}_2 + \vec{z}_2 \quad \text{mit } \vec{u}_2 \in \langle \vec{w}_1, \vec{w}_2 \rangle \text{ und } \vec{z}_2 \perp \langle \vec{w}_1, \vec{w}_2 \rangle \end{aligned}$$

und berechne die Beträge der vier Vektoren.

10.5 Ausblick

Dass man Funktionen auf einem Intervall in guter Näherung als Linearkombinationen trigonometrischer Funktionen[23] schreiben kann, ist von großer praktischer Bedeutung. Diese trigonometrischen Funktionen kann man leicht in Form von Wechselspannungen herstellen, dazu braucht man im Prinzip nur Dynamos in der richtigen Drehzahl anzutreiben. Vielleicht habt ihr in der Physik Spannungsquellen gesehen, die Rechteckspannungen oder Sägezahnspannungen liefern können. Die Graphen sehen aus wie die Graphen der Näherungen in den Abbildungen 50 und 49 auf der Seite 87, man kann diese Spannungen also „beliebig gut" mit Dynamos erzeugen. Oder denke an einen Synthesizer. Auf Knopfdruck ändert sich die Klangfarbe von Klavier auf Oboe oder Posaune. Man kann beliebige Klänge erzeugen, indem man sie aufnimmt, durch numerische Integration die zugehörigen Fourierkoeffizienten bestimmt und die Grundschwingungen in den entsprechenden Stärken mischt. Man spricht von „harmonischer Analyse".

Das ist aber alles nur so ungefähr; ich bin kein Fachmann in diesen Dingen und mag mich da jetzt auch nicht intensiv einarbeiten. Das Grundprinzip habe ich korrekt dargestellt, es passt in unseren Kontext, und es hat dir hoffentlich etwas gebracht. Eine genauere Analyse, wie sie zum Beispiel Riemann in einer bahnbrechenden Arbeit geboten hat, geht weit über das hinaus, was in der Schule auf der Tagesordnung steht; für solche Untersuchungen fehlt uns eine hinreichend entwickelte Theorie.

[23] Ich habe die Sache stark vereinfacht. Im allgemeinen Fall verwendet man zusätzlich die Funktionen $(x \mapsto \cos(kx))$ und die Funktion $(x \mapsto 1)$. Das Prinzip ist aber auch an der Version klar zu erkennen, die ich euch vorgestellt habe.

11 Übergangsmatrizen

11.1 Ein Beispiel zur Einführung

In unserem Buch[24] wird ein Versicherungsunternehmen vorgestellt. Es gibt die drei Tarifklassen 1, 2 und 3. Fahranfänger kommen in die teuerste Klasse 1. Nach einem Jahr unfallfreien Fahrens steigt man eine Klasse auf und fährt dann günstiger. Hat man einen Unfall, steigt man eine Klasse ab. Das Buch gibt folgende Daten an: 60% der Verträge in Klasse 1 sind nach einem Jahr immer noch in der Klasse 1, 40% sind aufgestiegen. Von den Verträgen der Klasse 2 sind nach einem Jahr jeweils 50% aufgestiegen und abgestiegen. Von der Verträgen der Klasse 3 sind nach einem Jahr 80% abgestiegen und 20% immer noch in der Klasse 3.

Solche Daten kann man gut in einem **Übergangsdiagramm** darstellen:

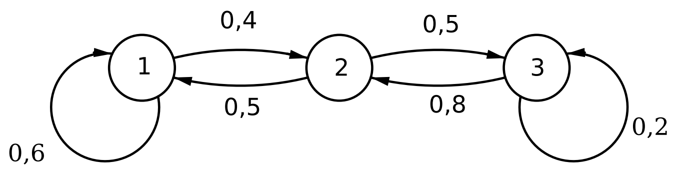


Abbildung 51: Ein Übergangsdiagramm

Übergangsdiagramme sind selbsterklärende und sehr anschauliche Werkzeuge.

Eine zweite Möglichkeit, die Daten ordentlich darzustellen, bietet die **Übergangsmatrix**

$$M = \begin{pmatrix} 0.6 & 0.5 & 0 \\ 0.4 & 0 & 0.8 \\ 0 & 0.5 & 0.2 \end{pmatrix} .$$

Bei den Matrizen musst du etwas Acht geben: In der **Spalte** 1 stehen die Zahlen der Pfeile, die **von 1 ausgehen**. Du bist sicher inzwischen darauf gekommen, dass es sich bei diesen Zahlen um (bedingte) Wahrscheinlichkeiten handelt: m_{ij} ist die Wahrscheinlichkeit, dass ein zufällig gewählter Vertrag aus der Tarifklasse j in einem Jahr in der Tarifklasse i ist.[25] Es ist dann klar, dass die Summe der Einträge einer jeden **Spalte** den Wert 1 haben muss.

Dein Job wird es sein, zu einem Diagramm die Matrix aufzustellen oder umgekehrt. Manchmal fehlen Werte, und die sollst du dann ermitteln, etwa über die Spaltensumme. Das sind leicht erwirtschaftete Klausurpunkte!

Ferner gibt das Buch an, dass die Versicherung zur Zeit 31400 Verträge der Tarifklasse 1, 15700 Verträge der Tarifklasse 2 und 11000 Verträge der Tarifklasse 3 verwaltet. Wieviele Vertäge werden in einem Jahr in der Tarifklasse 1 sein?[26] Klar:

$$0.6 \cdot 31400 + 0.5 \cdot 15700 + 0 \cdot 11000 \tag{36}$$

[24] Neue Wege Lineare Algebra, Aufgae 7 auf S. 153

[25] Wie kommt man an diese Wahrscheinlichkeiten – wenn man nicht gerade Schulbuchautor ist und frei erfundene Zahlen hinschreiben kann? Die Versicherung ermittelt relative Häufigkeiten aus ihren Daten und nimmt die als Schätzwerte für die Wahrscheinlichkeiten. Die Werte des Buches hier sind sehr bedenklich, finde ich.

[26] Wenn es keine neuen Verträge gibt und niemand kündigt ...

Wenn du scharf hinschaust, siehst du, dass das genau der obere Eintrag des Vektors $\vec{x}_1 = M\vec{x}_0$ ist, wenn man die gegebenen Bestandsdaten in einen Vektor

$$\vec{x}_0 \;=\; \begin{pmatrix} 31400 \\ 15700 \\ 11000 \end{pmatrix}$$

schreibt, und bei den übrigen Einträgen klappt das genauso. Eben dies ist der Grund, dass man bei derartigen Aufgabenstellungen mit Matrizen und Vektoren arbeitet. Es lässt sich alles recht bequem hinschreiben, und man hat das ganze Arsenal der Linearen Algebra zur Hand, um Erkenntnisse zu gewinnen.

Halten wir also folgendes Bildungsgesetz fest: Ist der Anfangsbestand $\vec{x}_0$, erhält man den Bestand $\vec{x}_k$ nach k Jahren so:

$$\vec{x}_1 \;=\; M\vec{x}_0, \quad \vec{x}_2 \;=\; M\vec{x}_1, \quad \ldots, \quad \vec{x}_{k+1} \;=\; M\vec{x}_k, \quad \ldots \tag{37}$$

Du kannst ja eine Prognose wagen, wie sich die Verhältnisse mit der Zeit entwickeln. Was die Rechnung[27] nach Gleichung (37) ergibt, zeigt Abbildung 52.

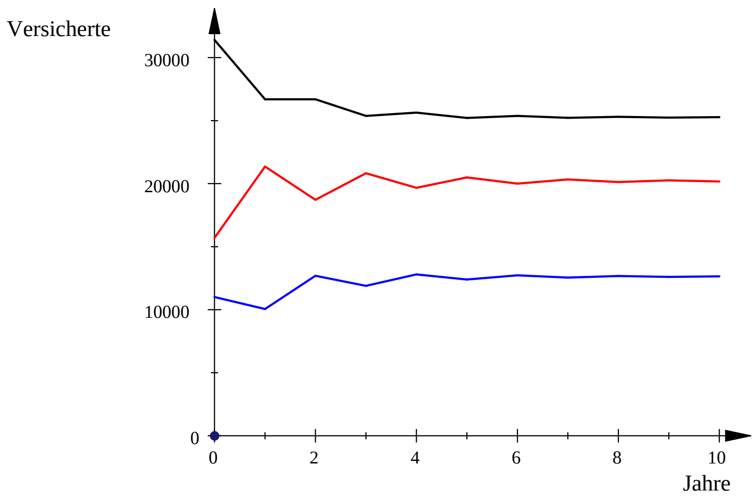


Abbildung 52: Entwicklung des Versichertenbestands in den nächsten zehn Jahren: Tarifklasse 1 in schwarz, Tarifklasse 2 in rot und Tarifklasse 3 in blau

Kleiner Ausflug in die Stochastik: Was steckt eigentlich hinter der Rechnung in Gleichung (36)? Ein zufällig gewählter Vertrag der Klasse 1 ist mit der Wahrscheinlichkeit $p = 0.6$ nach einem Jahr immer noch in der Klasse 1 – das ist ein Bernoulliversuch mit der Erfolgswahrscheinlichkeit 0.6. Die Anzahl der Verträge aus den 31400 der Tarifklasse 1, die nach einem Jahr noch in der Klasse 1 sind, ist folglich eine binomialverteilte Zufallsgröße, genauer, sie ist $B(31400; 0.6)$–verteilt. Der Summand $0.6 \cdot 31400$ ist folglich der **Erwartungswert** der Zufallsgröße. In den Vektoren $\vec{x}_1 = M\vec{x}_0$, $\vec{x}_2 = M\vec{x}_1, \ldots$ stehen **Erwartungswerte**. Und wenn du wissen willst, wie verlässlich die Werte sind, solltest du dir die Standardabweichung anschauen:

$$\sigma \;=\; \sqrt{31400 \cdot 0.6 \cdot 0.4} \;\approx\; \sqrt{31400 : 4} \;\approx \sqrt{8000} \;=\; \sqrt{80} \cdot \sqrt{100} \;\approx\; 9 \cdot 10 \;=\; 90$$

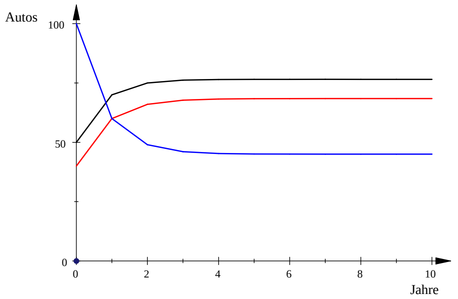
[27] uebergangsm.mn

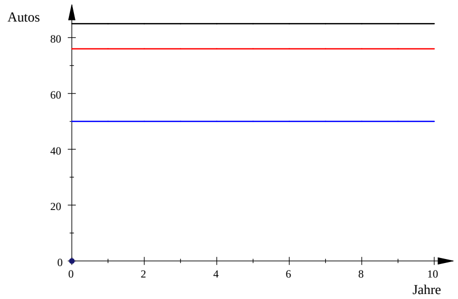
11.2 Bilderbuch mit Beispielen

Hier ist für einige Aufgaben aus dem Buch die zeitliche Entwicklung grafisch dargestellt.[28]

1. Beschaffungspolitik eines Autoverleihers, S. 169 Aufgabe 3

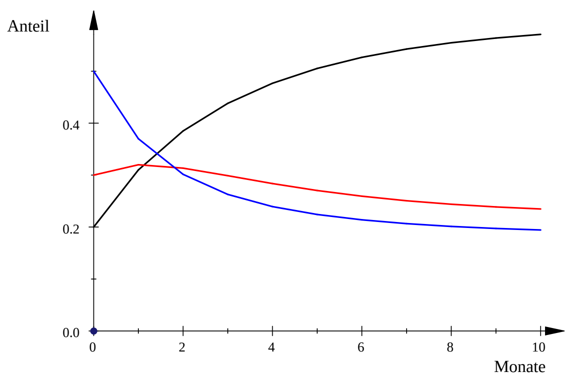
$$M \;=\; \begin{pmatrix} 0.6 & 0.25 & 0.3 \\ 0.3 & 0.5 & 0.25 \\ 0.1 & 0.25 & 0.45 \end{pmatrix} \,, \quad \vec{x}_0 = \begin{pmatrix} 50 \\ 40 \\ 100 \end{pmatrix} \quad \text{(links)}, \quad \vec{x}_0 = \begin{pmatrix} 85 \\ 76 \\ 50 \end{pmatrix} \quad \text{(rechts)}$$





2. Haarwaschmittelproduzent, S. 169 Aufgabe 4

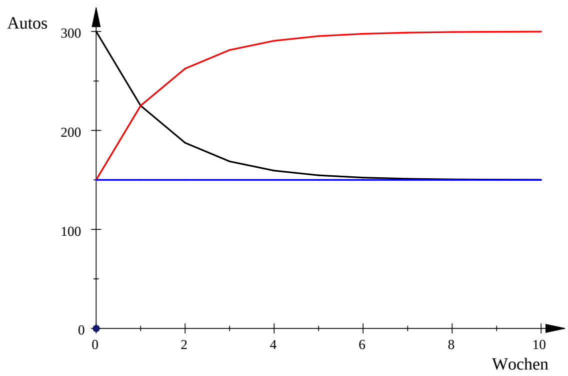
$$M \;=\; \begin{pmatrix} 0.9 & 0.1 & 0.2 \\ 0.05 & 0.7 & 0.2 \\ 0.2 & 0.2 & 0.6 \end{pmatrix} \,, \quad \vec{x}_0 = \begin{pmatrix} 0.2 \\ 0.3 \\ 0.5 \end{pmatrix}$$



3. Autoverleiher mit drei Standorten, S. 175 Aufgabe 19

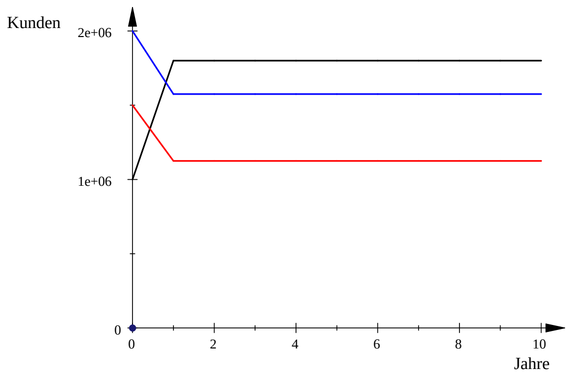
$$M \;=\; \begin{pmatrix} 0.6 & 0.1 & 0.2 \\ 0.2 & 0.7 & 0.4 \\ 0.2 & 0.2 & 0.4 \end{pmatrix} \,, \quad \vec{x}_0 = \begin{pmatrix} 300 \\ 150 \\ 150 \end{pmatrix}$$

[28] uebgangsmaufg.mn



4. Kundenströme bei Internetanbietern, S. 153 Aufgabe 8

$$M = \begin{pmatrix} 0.4 & 0.4 & 0.4 \\ 0.25 & 0.25 & 0.25 \\ 0.35 & 0.35 & 0.35 \end{pmatrix}, \quad \vec{x}_0 = \begin{pmatrix} 1000000 \\ 1500000 \\ 2000000 \end{pmatrix}$$



11.3 Einschub: Wie man Matrizen multipliziert

Wir wissen, dass durch Matrizen A, B Matrixabbildungen ($\vec{x} \mapsto A\vec{x}$) und ($\vec{y} \mapsto B\vec{y}$) gegeben sind.[29] Das Argument der zweiten Abbildung habe ich $\vec{y}$ genannt, weil ich möchte, dass es die Größe des Vektors $A\vec{x}$ haben soll; ich will nämlich auf $A\vec{x}$ die zweite Abbildung anwenden. Wenn A eine $m \times n$–Matrix ist, ist $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$, sonst kann man $A\vec{x}$ nicht bilden. Damit man $A\vec{x} \in \mathbb{R}^m$ von links mit B multiplizieren kann, muss B eine $l \times m$–Matrix sein. Das Endprodukt $B(A\vec{x})$ ist dann ein l–Vektor, also ein Element des $\mathbb{R}^l$.

Ich will nun eine Matrix C haben, die folgendes leistet: Zu jedem $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ soll $C\vec{x} = B(A\vec{x})$ sein, das heißt, die durch C gegebene Matrixabbildung soll genau das Gleiche tun wie die Hintereinanderausführung der Abbildungen zu A und B:

$$\vec{x} \longrightarrow A\vec{x} \longrightarrow B(A\vec{x}))$$

$$\vec{x} \xrightarrow{\qquad\qquad\qquad} C\vec{x}$$

Diese Matrix C will ich das Produkt der Matrizen B und A nennen: $C = BA$. Da C zu Vektoren $\vec{x}$ des $\mathbb{R}^n$ Vektoren $C\vec{x} \in \mathbb{R}^l$ ausgibt, muss C eine $l \times n$–Matrix sein, das ist klar.

Um C zu bestimmen, lasse ich $\vec{x}$ die Einheitsvektoren des $\mathbb{R}^n$ durchlaufen: Für $k = 1, 2, 3, \ldots, n$ ist

$$C\vec{e}_k \ = \ \vec{c}_k \quad \text{und} \quad B(A\vec{e}_k) \ = \ B\vec{a}_k \quad ,$$

das heißt: Der k–te Spaltenvektor $\vec{c}_k$ von C ist das Produkt $B\vec{a}_k$ von B mit dem k–ten Spaltenvektor $\vec{a}_k$ von A.

Damit ist die Sache klar. Wir definieren das Produkt BA zweier Matrizen B und A passender Größe so:

15 Definition
Es sei B eine $l \times m$–Matrix und $A = (\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n)$ eine $m \times n$–Matrix. Dann ist die Produktmatrix BA von B und A die Matrix

$$BA \ := \ (B\vec{a}_1, B\vec{a}_2, B\vec{a}_3, \ldots, B\vec{a}_n) \quad .$$

Für die so definierte Produktmatrix BA gilt

$$(BA)\vec{e}_k \ = \ B(A\vec{e}_k) \quad \text{für } k = 1, 2, 3, \ldots, n \quad ,$$

und man kann sich überlegen, dass auch $(BA)\vec{x} = B(A\vec{x})$ ist für jede Linearkombination $\vec{x}$ von $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3, \ldots, \vec{e}_n$, also für jedes $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$.

Anmerkung. Hier habe ich erklärt, wie Matrizenmultiplikation funktioniert. Es ist unerlässlich, dass du die praktische Handhabung ordentlich einübst; die solltest du im Schlaf beherrschen!

[29] Ja, es ist schon so, wie ich es durch die Schreibweise andeute: diese Abbildungen kann man als Vektoren ansehen, als Elemente eines Vektorraums, und damit rechnen!

11.4 Stochastische Matrizen und stabile Zustände

Bei den bisherigen Bespielen war es so, dass ein Gesamtbestand nur umverteilt wurde, die Gesamtgröße aber konstant blieb; die Matrixeinträge waren Übergangswahrscheinlichkeiten. In jeder Matrixspalte stehen dann die einzelnen Wahrscheinlichkeiten dafür, dass man vom Spaltenzustand in den jeweiligen Zeilenzustand wechselt. Daraus ergibt sich bekanntlich, dass die Summen der Einträge einer jeden Spalte $= 1$ sein müssen. Matrizen dieser Bauart heißen stochastische Matrizen:

16 Definition
Eine quadratische Matrix, deren Einträge alle ≥ 0 *sind und bei der jede Spaltensumme den Wert* 1 *hat, heißt* **stochastische Matrix**.

Bei den Beispielen stochastischer Matrizen, die wir bisher sahen, schien $\vec{x}_n$ immer gegen einen festen Vektor zu streben, und das passierte sogar recht schnell. Diese Vektoren standen für stabile Verteilungen, die sich nicht ändern, wenn man die Matrix auf sie anwendet. Das heißt, diese stabilen Verteilungen sind, wenn wir die Matrix mit A bezeichnen, Lösungen der Gleichung

$$A\vec{x} \;=\; \vec{x} \quad . \tag{38}$$

Ich hoffe mal, dass du die Sache sofort wiedererkennst: stabile Verteilungen sind Fixvektoren der Matrixabbildung ($\vec{x} \mapsto A\vec{x}$). So berechnet man die:

Ausgeschrieben sieht Gleichung (38) so aus:

$$\begin{array}{ccccccccc}
a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \ldots & + & a_{1m}x_m & = & x_1 \\
a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \ldots & + & a_{2m}x_m & = & x_2 \\
\vdots & + & \vdots & + & \ddots & + & \vdots & = & \vdots \\
a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \ldots & + & a_{mm}x_m & = & x_m
\end{array}$$

Jetzt muss man nur noch die Variablen auf der rechten Seite auf die linke Seite bringen, und die Sache ist klar:

$$\begin{array}{ccccccccc}
(a_{11}-1)x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \ldots & + & a_{1m}x_m & = & 0 \\
a_{21}x_1 & + & (a_{22}-1)x_2 & + & \ldots & + & a_{2m}x_m & = & 0 \\
\vdots & + & \vdots & + & \ddots & + & \vdots & = & \vdots \\
a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \ldots & + & (a_{mm}-1)x_m & = & 0
\end{array}$$

Da steht ein homogenes $m \times m$–LGS mit der Koeffizientenmatrix $A - E_m$, wenn wir mit E_m die $m \times m$–Einheitsmatrix bezeichnen:

$$A\vec{x} \;=\; \vec{x} \quad \Leftrightarrow \quad (A - E_m)\vec{x} \;=\; \vec{0} \tag{39}$$

Die Lösungsmenge ist nur $\{\vec{0}\}$ oder das Erzeugnis eines (oder mehrerer) Vektoren, damit kennen wir uns aus.

Technische Übungen

1. Es sei A ein Zeilenvektor, also eine $1 \times m$–Matrix, deren Einträge alle $= 1$ sind, und B eine stochastische $m \times m$–Matrix. Was ist dann AB?
2. Bei einer stochastischen Matrix A haben $\vec{x}$ und $A\vec{x}$ die gleiche Spaltensumme.
3. Kann eine Matrix auch Fixvektoren haben, wenn sie nicht quadratisch ist?
4. Es sei $A = (\vec{a}, \vec{a}, \ldots, \vec{a})$ eine Matrix, deren Spaltenvektoren alle gleich sind, und $\vec{x}$ ein Vektor passender Größe mit nichtnegativen Einträgen und Spaltensumme 1. Was ist $A\vec{x}$?

11.5 Praktisches Rechnen und geometrischer Hintergrund

Was sollst du praktisch tun? Nehmen wir als Beispiel die Aufgabe 3 auf der Seite 169 im Buch. Da siehst du ein Übergangsdiagramm. Dann sollst du zunächst eine Matrix dazu aufstellen. Das ist kein Kunststück, du musst nur genau im Auge behalten, wie du die Zustände anordnest. Wenn es eine natürliche Anordnung gibt, wie hier, nimmst du am besten die; hier gehören also die Spalten 1,2,3 zu A,B,C, in dieser Reihenfolge. Die Matrix ist dann:

$$M = \begin{pmatrix} 0.6 & 0.25 & 0.0.3 \\ 0.3 & 0.5 & 0.25 \\ 0.1 & 0.25 & 0.45 \end{pmatrix}$$

Es ist keine übertriebene Vorsicht zu überprüfen, ob auch alle Spaltensummen den Wert 1 haben; wenn die Matrix falsch ist, sitzt du tief in der Tinte.

Was nun? In aller Regel musst du irgendwann nach stabilen Verteilungen suchen: Dazu löst du das homogene LGS

$$(M - E_3)\vec{x} = \vec{0} \ ;$$

die Koeffizientenmatrix bekommst du leicht, indem du von jedem Element der Hauptdiagonalen von M den Wert 1 subtrahierst und den Rest unverändert übernimmst. Die Rechnung führe ich nicht vor, die Lösungsmenge des LGS ist:

$$\mathbb{L} \ = \ \left\langle \begin{pmatrix} 85 \\ 76 \\ 50 \end{pmatrix} \right\rangle$$

Es gibt also nur eine stabile Verteilung mit der Spaltensumme 1, nämlich

$$\frac{1}{85+76+50} \begin{pmatrix} 85 \\ 76 \\ 50 \end{pmatrix} \ := \ \frac{1}{211} \begin{pmatrix} 85 \\ 76 \\ 50 \end{pmatrix} \quad .$$

In der Aufgabe sollst du für zwei verschiedene Anfangsverteilungen

$$\vec{x}_0 \ = \ \begin{pmatrix} 50 \\ 40 \\ 100 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \vec{y}_0 \ = \ \begin{pmatrix} 85 \\ 76 \\ 50 \end{pmatrix}$$

die drei Folgeverteilungen ausrechnen, also jeweils die ersten Glieder der Folgen

$$\begin{array}{l} \vec{x}_0, \quad \vec{x}_1 = M\vec{x}_0, \quad \vec{x}_2 = M\vec{x}_1, \quad \vec{x}_3 = M\vec{x}_2, \quad \ldots \\ \vec{y}_0, \quad \vec{y}_1 = M\vec{y}_0, \quad \vec{y}_2 = M\vec{y}_1, \quad \vec{y}_3 = M\vec{y}_2, \quad \ldots \end{array}$$

Hier ist es nun egal, ob du mit den absoluten Werten in den $\vec{x}_k$ rechnest oder mit den Anteilen, also mit

$$\vec{z}_0 \ := \ \frac{1}{190}\vec{x}_0 \quad ,$$

denn

$$\vec{z}_1 \ = \ M\vec{z}_0 \ = \ M \cdot \left(\frac{1}{190}\vec{x}_0\right) \ = \ \frac{1}{190} \cdot (M\vec{x}_0) \ = \ \frac{1}{190} \cdot \vec{x}_1 \quad ,$$

die Glieder $\vec{x}_k$ und $\vec{z}_k$ der beiden Folgen unterscheiden sich nur um einen konstanten Faktor, der nicht von k anhängt.

Es ist sehr erhellend, **geometrisch zu interpretieren**, was da geschieht. Alle Vektoren $\vec{x} \in \mathbb{R}^3$ mit der Spaltensumme 1 erfüllen die Gleichung

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} * \vec{x} \; = \; 1 \quad ,$$

gehören also zu Punkten einer Ebene im Raum mit dem Normalenvektor

$$\vec{n} \; = \; \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad .$$

Multipliziert man einen solchen Vektor (von links) mit einer stochastischen Matrix M, bleibt die Spaltensumme unverändert; der Bildpunkt zu $M\vec{x}$ liegt also in der selben Ebene. Die Vektoren mit Einträgen ≥ 0 und Spaltensumme 1 gehören zu den Punkten des Dreiecks mit den Eckpunkten $E_1(1|0|0)$, $E_2(0|1|0)$ und $E_3(0|0|1)$. Ist P ein Punkt dieses Dreiecks, gehört zu $M\vec{p}$ wieder ein Punkt des Dreiecks, denn alle Einträge von $M\vec{p}$ sind wieder ≥ 0:
Die durch $\vec{x} \mapsto M\vec{x}$ gegebene Abbildung, M stochastische Matrix, bildet das Dreieck $E_1E_2E_3$ in sich ab!
Und die Fixvektoren der Matrix gehören zu einer Geraden durch den Nullpunkt, sie schneidet das Dreieck in genau einem Punkt, und der gehört zur stabilen Verteilung mit Spaltensumme 1.

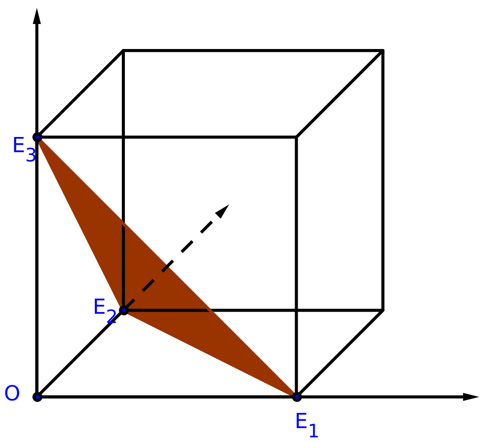


Abbildung 53: Dreieck der Raumpunkte mit Koordinaten ≥ 0 und Summe 1

11.6 Langzeitverhalten bei stochastischen Matrizen (1)

Wir schauen uns noch einmal das erste der Beispiele im Bilderbuch auf der Seite 92 an. Hier sind Bilder dazu. Der besseren Vergleichbarkeit wegen stehen an der Hochachse nicht mehr die absoluten Zahlen der Autos, sondern deren Anteile am Gesamtbestand.

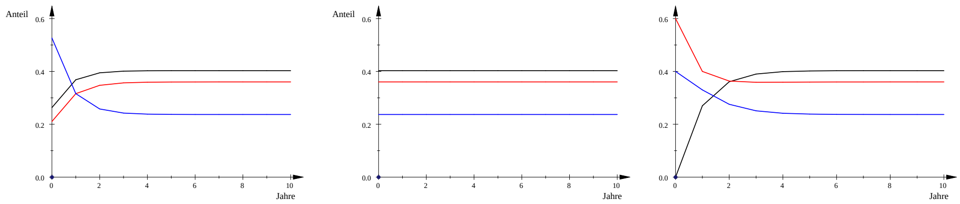


Abbildung 54: Noch einmal die Beschaffungspolitik des Autoverleihers, Buch S. 169 Aufgabe 3. Ein drittes Beispiel ist hinzugefügt, und an der Hochachse stehen nicht mehr absolute Zahlen, sondern Anteile

Obwohl die Ausgangssituationen sehr verschieden sind, stellt sich stets schon nach einigen Zyklen im Wesentlichen der gleiche Zustand ein. Diesem Phänomen wollen wir nun nachspüren.

1. Jeder mögliche Zustand des betrachteten Systems gehört zu einem Vektor $\vec{x} \in \mathbb{R}^3$. Die Einträge sind alle ≥ 0 und die Summe ist $= 1$, der Vektor ist also Ortsvektor eines Punktes X des Dreiecks $E_1E_2E_3$ in der Abbildung 53 auf der Seite 97.

2. Jeden Punkt X_0 des Dreiecks kann man als Startvektor $\vec{x}_0$ nehmen. Der nächste Punkt X_1 liegt dann im Bilddreieck des Ausgangsdreiecks $E_1E_2E_3$ unter der Abbildung $\vec{x} \mapsto M\vec{x}$. Die Ortsvektoren dieser Punkte sind gerade die Spaltenvektoren der Matrix M, denn es gilt $M\vec{e}_j = \vec{m}_j$ für $j = 1, 2, 3$.

3. Der dann folgende Punkt X_2 wiederum liegt im Bilddreieck des neuen Dreiecks, seine Eckpunkte haben die Ortsvektoren
$$M(M\vec{e}_j) \;=\; (MM)\vec{e}_j \;=\; M^2\vec{e}_j \quad \text{für } j = 1, 2, 3\ ,$$
und das sind genau die drei Spaltenvektoren von M^2.

4. Und das geht immer so weiter: Die Spaltenvektoren von M^k sind genau die Ortsvektoren des Dreiecks, in dem der k–te Punkt X_k liegt. Wenn wir also zu jeder Potenz
$$M,\ M^2,\ M^3, \ldots$$
von M das Dreieck bilden, dessen Eckpunkte als Ortsvektoren die Spaltenvektoren dieser Matrizen haben, erhalten wir eine Folge von Dreiecken, und das k–te Dreieck der Folge enthält den Punkt X_k.

Abbildung 55 zeigt die ersten Dreiecke der Folge, die Dreiecke scheinen sich auf einen Punkt zusammenzuziehen! Du findest dort auch die Matrizen E_3, M, M^2, M^3 und M^4, in deren Spalten ja, wie wir oben gesehen haben, die Ortsvektoren der Ecken der Dreiecke stehen.

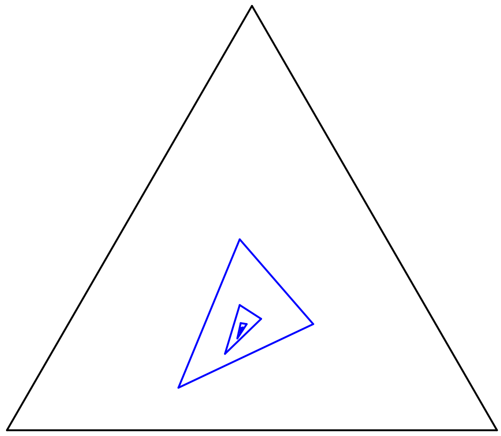


Abbildung 55: Ausgangsdreieck $E_1E_2E_3$ und die ersten Dreiecke der Folge, deren Eckpunkte als Ortsvektoren die Spaltenvektoren von M^k haben. Das k–te Dreieck enthält den Punkt X_k jeder Folge von Vektoren $\vec{x}_k = M^k\vec{x}_0$, wobei X_0 ein beliebiger Punkt des Dreiecks $E_1E_2E_3$ ist

$$E(3) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$M = E(3)M = \begin{pmatrix} 0.6 & 0.25 & 0.3 \\ 0.3 & 0.5 & 0.25 \\ 0.1 & 0.25 & 0.45 \end{pmatrix}$$

$$M^2 = MM = \begin{pmatrix} 0.465 & 0.35 & 0.3775 \\ 0.355 & 0.3875 & 0.3275 \\ 0.18 & 0.2625 & 0.295 \end{pmatrix}$$

$$M^3 = M^2M = \begin{pmatrix} 0.42175 & 0.385625 & 0.396875 \\ 0.362 & 0.364375 & 0.35075 \\ 0.21625 & 0.25 & 0.252375 \end{pmatrix}$$

$$M^4 = M^3M = \begin{pmatrix} 0.408425 & 0.39746875 & 0.401525 \\ 0.3615875 & 0.360375 & 0.35753125 \\ 0.2299875 & 0.24215625 & 0.24094375 \end{pmatrix}$$

Mit Hilfe der Matrizen sollst du folgendes tun:

1. Gib zu jedem Dreieck einen möglichst kleinen Quader an, dessen Seitenflächen parallel zu den Koordinatenebenen sind, der das Dreieck umfasst. Am einfachsten geht das so, dass du die Intervalle auf den Achsen hinschreibst, in deren Bereich sich der Quader erstreckt, und deren Länge. Für das zweite Dreieck beispielsweise, dessen Eckpunkte in M stehen, sind die Intervalle und deren Längen

$$x:\ [0.25; 0.6],\ 0.35; \quad y:\ [0.25; 0.5],\ 0.25; \quad z:\ [0.25; 0.45],\ 0.2\ .$$

2. Vergewissere dich, dass die Intervalle zum nächsten Dreieck immer in den entsprechenden des gerade betrachteten Dreiecks enthalten sind, und dass die Intervalle immr kürzer werden. Beginne ruhig mit $E(3)$.

3. Berechne für aufeinanderfolgende Dreiecke jeweils für die x–, y– und z–Koordinate die Quotienten der Intervalllängen. Der kleinste Eintrag in M ist 0.1. Nach der Rechnung, die ich vorgeführt habe, sollten die Quotienten sämtlich

$$\leq 1 - 2 \cdot 0.1 = 0.8$$

sein!

Nach diesem konkreten Beispiel, das euch die Sache hoffentlich etwas klarer gemacht hat, nehmen wir wieder die allgemeine Situation[30] in den Blick.

1. Die durch die Spaltenvektoren der Potenzen M^k der stochastischen Matrix M gegebenen Dreiecke sollen sich für $k \to \infty$ auf einen festen Punkt zusammenziehen, sie müssen also alle für $k \to \infty$ gegen den gleichen Vektor streben.

2. Damit das passiert, muss für jede Zeile von M^k die Differenz zwischen dem größten und dem kleinsten Eintrag der Zeile gegen Null laufen für $k \to \infty$.

3. Wir betrachten eine Zeile der M^k, meinetwegen die erste Zeile, in der die x–Koordinaten der Eckpunkte des k–ten Dreiecks stehen. Den kleinsten x–Wert nennen wir g_k, den größten G_k. Für die Einträge $m_{1j}^{(k)}$ der ersten Zeile von M^k gilt also
$$g \ \leq \ m_{1j}^{(k)} \ \leq \ G \quad \text{für } j = 1, 2, 3.$$

4. Nun schauen wir uns an, wie die erste Zeile von $M^{k+1} = M^k M$ aussieht. Um die Bezeichnungen einfach zu halten, bezeichnen wir die erste Zeile von M^k mit $(a_1 \ a_2 \ a_3)$ und den Spaltenvektor von M, mit dem wir gerade arbeiten, mit $\vec{b}$. Die Einträge der ersten Zeile von M^{k+1} sehen dann so aus:

$$a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 \ =: \ c$$

Dabei liegen die a_j und die b_j zwischen 0 und 1, und die Summe der b_j ist $= 1$. Wenn wir das Größte der a_j mit G bezeichnen, gilt dann:

$$c \ = \ a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 \ \leq \ Gb_1 + Gb_2 + Gb_3 \ = \ G(b_1 + b_2 + b_3) \ = \ G$$

Genauso zeigt man, dass c mindestens so groß ist wie das Kleinste der a_j. Damit gilt stets
$$g_k \leq g_{k+1} \quad \text{und} \quad G_{k+1} \leq G_k \ \ ,$$

Das heißt: **Alle Einträge der ersten Zeile von M^{k+1} liegen zwischen dem kleinsten und dem größten Eintrag der ersten Zeile von M^k.**

5. Schaut man etwas genauer hin, kann man sogar zeigen, dass

$$g_k + (G_k - g_k)b \ \leq \ g_{k+1} \quad \text{und} \quad G_{k+1} \ \leq \ G_k - (G_k - g_k)b$$

ist, dabei ist b das kleinste der b_j. Daraus ergibt sich, dass

$$G_{k+1} - g_{k+1} \ \leq (G_k - g_k)(1 - 2b)$$

ist.

[30] Ich bleibe aber bei 3×3–Matrizen, sonst werden nur die Terme komplizierter.

Es gilt also der folgende Satz:[31]

17 Satz
Es sei M eine stochastische Matrix, und es sei der kleinste Eintrag von M eine positive Zahl $b > 0$. Dann gilt:

1. *M^k strebt für k gegen Unendlich gegen eine Grenzmatrix G, und alle Spalten von G sind der gleiche Vektor $\vec{g}$:*

$$M^k \xrightarrow{k\to\infty} G = (\vec{g}, \vec{g}, \ldots, \vec{g})$$

2. *Kleinster und größter Wert einer jeden Zeile von M^k unterscheiden sich höchstens um $(1-2b)^k$.*

3. *Für jeden Startvektor $\vec{x}_0$ strebt die durch $\vec{x}_{k+1} = M\vec{x}_k$ definierte Folge $\vec{x}_0, \vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots$ gegen $\vec{g}$:*

$$\vec{x}_k \xrightarrow{k\to\infty} \vec{g}$$

Anmerkung. Dass G Grenzmatrix von M^k ist, ist komponentenweise gemeint: Die Einträge $m_{ij}^{(k)}$, die an der Stelle ij von M^k stehen, streben gegen den ij–Eintrag g_{ij} von G.

[31] Meine Bezeichnungen sind leider etwas unglücklich, eben waren G und g noch größte und kleinste Zahl einer Matrixzeile.

11.7 Langzeitverhalten bei stochastischen Matrizen (2)

Es sei M eine stochastische 3×3–Matrix. Die stochastischen Vektoren des $\mathbb{R}^3$ bilden die Menge

$$D_0 \; := \; \{\, x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2 + z\vec{e}_3 \,|\, 0 \leq x, y, z;\; x + y + z = 1 \,\} \quad ,$$

wir haben sie uns als Dreieck im Raum mit den Eckpunkten $E_1(1|0|0)$, $E_2(0|1|0)$ und $E_3(0|0|1)$ vorgestellt – gemeint ist die Fläche, wohlgemerkt , nicht nur der Rand des Dreiecks.

Wenden wir auf alle Elemente von D_0 unsere Matrix M an, erhalten wir eine neue Menge von Vektoren des $\mathbb{R}^3$, nämlich

$$D_1 \; := \; \{\, xM\vec{e}_1 + yM\vec{e}_2 + zM\vec{e}_3 \,|\, 0 \leq x, y, z;\; x + y + z = 1 \,\} \quad .$$

Geometrisch können wir D_1 leicht deuten: Es ist das (möglicherweise entartete) Dreieck, dessen Eckpunkte durch die Vektoren[32] $M\vec{e}_1, M\vec{e}_2, M\vec{e}_3$ gegeben sind. Da es sich wieder um stochastische Vektoren handelt, ist D_1 in D_0 enthalten:

$$D_1 \; \subseteq \; D_0$$

Dieses Enthaltensein bleibt erhalten, wenn wir auf beide Mengen die Matrix M anwenden! Die Anwendung von M auf D_0 ergibt D_1, die Anwendung von M auf D_1 ergibt die Menge

$$D_2 \; := \; \{\, xM^2\vec{e}_1 + yM^2\vec{e}_2 + zM^2\vec{e}_3 \,|\, 0 \leq x, y, z;\; x + y + z = 1 \,\} \quad ,$$

geometrisch ist D_2 das (möglicherweise entartete) Dreieck, dessen Eckpunkte durch die Spaltenvektoren von M^2 gegeben sind.

Damit haben wir

$$D_2 \; \subseteq D_1 \quad ,$$

und wenn wir allgemein

$$D_k \; := \; \{\, xM^k\vec{e}_1 + yM^k\vec{e}_2 + zM^k\vec{e}_3 \,|\, 0 \leq x, y, z;\; x + y + z = 1 \,\}$$

setzen für $k = 1, 2, 3, \ldots$ und in dieser Weise fortfahren, erhalten wir die Beziehung:

$$D_0 \; \supseteq \; D_1 \; \supseteq \; D_2 \; \supseteq \; D_3 \supseteq \; \ldots \quad .$$

Mag wohl sein, dass dir langsam mulmig wird. Lasse dich nicht ins Bockshorn jagen, in geometrischer Sprache steht da nur, dass jedes der (vielleicht entarteten) Dreiecke

$$D_1, D_2, D_3, \ldots, D_k, \ldots \quad ,$$

deren Eckpunkte durch die Spaltenvektoren von

$$M, M^2, M^3, \ldots, M^k, \ldots$$

gegeben sind, alle nachfolgenden Dreiecke umfasst – das ist der Kern der Sache. Auf der Seite 103 siehst du die ersten Dreiecke für das M des Haarwaschmittelsbeispiels von Seite 92, das uns ja etwas Mühe gemacht hatte.

Was ich hier beschrieben habe, gilt nicht nur für 3×3–Matrizen. Bei 2×2–Matrizen bilden die stochastischen Vektoren eine Strecke, bei 4×4–Matrizen einen Körper, genauer, ein Tetraeder, bei 5×5–Matrizen ein vierdimensionales Gebilde, aber das nur nebenbei.

Praktisch wichtig für uns ist das Enthaltensein der Dreiecke aus einem anderen Grund. Satz 17 auf Seite 101 garantiert uns, dass M^k für k gegen Unendlich gegen eine Grenzmatrix strebt, wenn M stochastisch ist und keine Nullen enthält. Wir können die Voraussetzung nun etwas schwächer machen:

[32] Das sind offensichtlich die Spaltenvektoren von M!

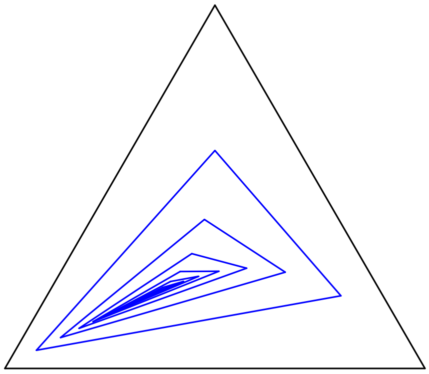


Abbildung 56: Bilder der Dreiecke zu $D_0, D_1, D_2, \ldots$ zum M des Haarwaschmittelbeispiels auf Seite 92

18 Satz
Es sei M eine stochastische Matrix. Wenn alle Einträge von M^l positiv sind für einen Exponenten l, dann hat strebt M^k gegen eine Grenzmatrix für k gegen Unendlich.

Beweis. Da M^l laut Voraussetzung nur positive Einträge besitzt, gilt nach Satz 17 auf Seite 101

$$\left(M^l\right)^k \quad \xrightarrow{k\to\infty} \quad G \quad .$$

Nun ist $\left(M^l\right)^k = M^{kl}$, folglich ziehen sich die (wie oben definierten) geometrischen Gebilde

$$D_l, D_{2k}, D_{3l}, \ldots$$

für k gegen Unendlich auf einen Punkt zusammen. Da die übrigen D_j in solchen enthalten sind, ziehen sich die Gebilde der ganzen Folge D_k auf einen Punkt zusammen. Daraus folgt die Behauptung. □

Anmerkung. Das ist vermutlich harte Kost für euch. Was müsst ihr davon behalten? **Dass die Existenz einer Grenzmatrix G von M^k schon dann gesichert ist, wenn es eine Potenz M^l von M gibt, die nur positive Einträge hat.** Das ist ein nützliches Werkzeug für Anwendungsaufgaben.

11.8 Wie man die Grenzmatrix findet

Sucht man zu einer gegebenen quadratischen Matrix M eine Grenzmatrix von M^k für k gegen Unendlich, kann das folgende Lemma nützlich sein. Es liefert eine notwendige Bedingung[33] dafür, dass eine Matrix G Grenzmatrix von M^k ist.[34]

19 Lemma
Es sei M eine quadratische Matrix und es gelte

$$M^k \xrightarrow{k\to\infty} G \quad .$$

Dann gilt

$$MG = GM = G \quad .$$

Beweis. Natürlich gilt

$$M^{k+1} \xrightarrow{k\to\infty} G \quad ,$$

das ist eine Binsenweisheit, denn die Folge

$$M^2, M^3, \ldots$$

erhält man aus der ursprünglichen Folge

$$M, M^2, M^3, \ldots \quad ,$$

indem man die erste Matrix streicht, und das hat keinen Einfluss auf den Grenzwert für k gegen Unendlich. Aber nun ist einerseits

$$\begin{aligned} M^{k+1} &= M^k M \xrightarrow{k\to\infty} GM \quad \text{und andererseits} \\ M^{k+1} &= M M^k \xrightarrow{k\to\infty} MG \quad . \end{aligned}$$

Daraus folgt nun die behauptete Gleichung. □

Und so wendest du das Lemma an, um zu einer gegebenen quadratischen Matrix M Kandidaten für eine Grenzmatrix zu finden: Wenn $MG = G$ gelten soll, muss für jeden Spaltenvektor $\vec{g}$ von G ja $M\vec{g} = \vec{g}$ sein. Folglich musst du die Fixvektoren von M ausrechnen, wenn du die Kandidaten für $\vec{g}$ finden willst, also die Lösungen des LGS $M\vec{x} = \vec{x}$. Das ist das homogene LGS mit der Koeffizientenmatrix

$$M - E_n = \begin{pmatrix} m_{11}-1 & m_{12} & m_{13} & \ldots & m_{nn} \\ m_{21} & m_{22}-1 & m_{23} & \ldots & m_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ m_{n1} & m_{n2} & \ldots & \ldots & m_{nn}-1 \end{pmatrix} \quad , \tag{40}$$

wenn M eine $n \times n$–Matrix und E_n die Einheitsmatrix der gleichen Größe ist.

Wenn du Glück hast, ist der Lösungsraum eindimensional. Dann enthält er in der Regel nur einen einzigen Kandidaten für $\vec{g}$, weil zum Beispiel die Spaltensumme einen bestimmten Wert haben muss. Gelegentlich schreibe ich dir ein durchgerechnetes Beispiel auf.

[33] Eine notwendige Bedingung dafür, dass eine Funktion f an der Stelle x_0 ein lokales Extremum hat, ist, dass $f'(x_0) = 0$ ist. Du berechnest also, wenn das technisch möglich ist, die Nullstellen von f', denn **höchstens** diese können (lokale) Extremstellen sein.

[34] Dieses Lemma gilt für beliebige quadratische Matrizen, sie müssen nicht stochastisch sein. Du kannst das Lemma auch bei den Populationsmatrizen anwenden, also bei den echten Käferaufgaben.

11.9 Stochastische Matrizen haben immer Fixvektoren

Eine stochastische Matrix M hat nur Einträge ≥ 0, und alle Spaltensummen sind $= 1$, klar. Behalte dies im Hinterkopf und sieh dir das LGS an, dessen Lösungsmenge der Fixraum ist: du findest es ausführlich hingeschrieben in der Gleichung (40) auf der Seite 104. Schaue dir dort die erste Spalte an. Die Summe der m_{i1} ist $= 1$, zusammen mit der -1 im obersten Eintrag ergibt sich also insgesamt 0. Und bei den anderen Spalten geht das genauso; die Summe $\sum_{i=1}^{n} m_{ij}$ hat den Wert 1, in der Hauptdiagonalen steht eine -1, insgesamt kommt 0 heraus. Wenn du also zur letzten Zeile des LGS alle übrigen Zeilen addierst – das ist eine erlaubte Umformung des LGS – stehen in der letzten Zeile nur noch Nullen. Auf der rechten Seite ist auch eine 0, du kannst die letzte Zeile einfach streichen. Folglich hat das LGS eine Spalte mehr als Zeilen, und da es homogen ist, ist jedenfalls eine Variable frei wählbar, der Lösungsraum folglich mindestens eindimensional! – Halten wir das Ergebnis fest:

20 Satz
Es sei M eine stochastische Matrix. Dann hat der Fixraum von M mindestens die Dimension 1.

11.10 Anwendungsbeispiel: aus Aufgabe 6 Abi 2009

Wir nehmen die Übergangsmatrix aus der Aufgabe 6 vom Abitur 2009, die ihr heute bekommen habt, und fragen nach dem Verhalten auf lange Sicht. Ob es in der Aufgabe um Autos, Arbeiter, Stromkunden, Käfer oder Rindviecher geht, ist beinahe egal, wichtig ist nur, dass die Gesamtzahl der betrachteten Population als konstant angesehen wird. Dann nämlich sind die Spaltensummen der Matrix $= 1$, und wir haben es, da die Einträge ≥ 0 sind, mit einer stochastischen Matrix zu tun und können unsere Theorie dieser Matrizen anwenden. – Ich schreibe die Matrix hin, damit du nicht in deinen Unterlagen suchen musst:

$$M \;=\; \begin{pmatrix} 0.7 & 0.1 & 0.1 \\ 0.2 & 0.85 & 0 \\ 0.1 & 0.05 & 0.9 \end{pmatrix}$$

Leider enthält die Matrix eine Null, der gute Satz 17 auf Seite 101 ist nicht anwendbar. Aber offensichtlich hat schon M^2 keine Null mehr, deshalb garantiert der Satz 18 auf Seite 103, dass M^k für k gegen Unendlich gegen eine Grenzmatrix strebt, deren Spaltenvektoren alle gleich sind.

In der Aufgabe wird gar nicht nach einer Grenzmatrix gefragt, sondern nur nach einem stabilen Zustand. Wir müssen den Fixraum ausrechnen, das lasse ich aber MuPAD machen. Danach ist der Fixraum

$$\left\langle \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} \right\rangle \quad ,$$

und das sind immerhin angenehme Zahlen.

Um nun die verlangte stabile Verteilung der 1200 Mitarbeiter zu finden, müssen wir den Fixvektor mit der Spaltensumme 1200 aufsuchen. Das ist nicht so tiefsinnig, es ist

$$\frac{1200}{3+4+5} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} \;=\; \begin{pmatrix} 300 \\ 400 \\ 500 \end{pmatrix} \quad .$$

In der Aufgabe sind nun noch einige Daten auszurechnen und einige Terme zu deuten, aber dazu schreibe ich jetzt nichts mehr. Nur interessehalber schauen wir uns an, wie schnell sich die Potenzen der Matrix der Grenzmatrix nähern. Der kleinste Eintrag in M^2 ist 0.02, das ist sehr wenig. Das heißt, dass man schon M^{2k} braucht, damit die Differenz zwischen größtem und kleinstem Eintrag einer Zeile garantiert höchstens

$$(1 - 2 \cdot 0.02)^k \;=\; 0.96^k$$

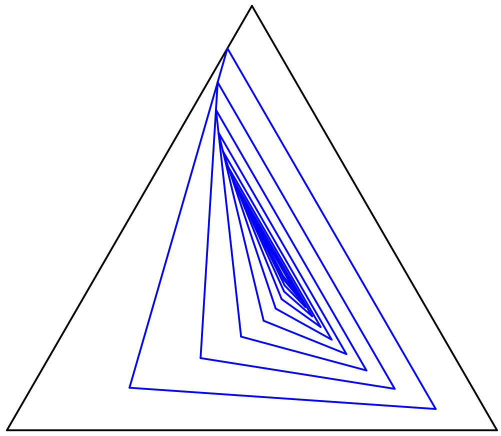
ist. Entspechend langsam ziehen sich die Dreiecke auf einen Punkt zusammen. Unten siehst du ein Bild; die Dreiecke werden schnell schmal, aber die Höhe nimmt nur sehr langsam ab.

Wenn wir sicher sein wollen, dass sich die Einträge einer Zeile von M^{2k} um maximal 0.01 unterscheiden, muss

$$0.96^k \;\leq\; 0.01 \quad ,$$

also

$$k \;\geq\; \frac{\ln(0.01)}{\ln(0.96)} \;\approx\; 112.811$$



sein. Das ist übel. In Wirklichkeit sind allerdings die Spaltenvektoren von M^{100} schon praktisch gleich, den Exponenten 226 der Abschätzung braucht man dann doch nicht.

Wichtiger Hinweis: In der Abiturklausur interessierte so etwas bisher niemanden! Nicht, dass du dann solche Untersuchungen anstellst; ich könnte sie nicht honorieren.

11.11 Kleiner Zoo stochastischer Matrizen

Harmlos sind die stochastischen Matrizen mit lauter positiven Einträgen sowie die, die zwar Nullen haben, welche aber beim Potenzieren irgendwann verschwinden. Von der ersten Art ist zum Beispiel die Matrix aus der Wetteraufgabe, von der zweiten

$$M_1 \; = \; \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 1 \\ \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad M_1^2 \; = \; \begin{pmatrix} \frac{3}{4} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \quad .$$

Für eine Matrix M dieser Art gilt bekanntlich

$$M^k \quad \xrightarrow{k\to\infty} \quad G \; = \; (\vec{g}, \vec{g}, \ldots, \vec{g}) \quad ,$$

und für jeden stochastischen Startvektor $\vec{x}_0$ konvergiert $\vec{x}_k \; = \; M^k \vec{x}_0$ gegen eben dieses $\vec{g}$ für $k \to \infty$.

Problematisch wird die Sache, wenn jede Potenz M^k der stochastischen Matrix Nullen enthält. Da kann alles Mögliche passieren, wie man sieht, wenn man an den Käfigen entlanggeht, wo solche Tiere leben. Ich führe einige Exemplare dieser Arten vor.

1. Beginnen wir mit

$$M \; = \; \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad M^2 \; = \; \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad M^3 = M \quad .$$

   Hier hat M^k offensichtlich keine Grenzmatrix, obwohl der Fixraum

$$\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

   eindimensional ist.[35] Nimmt man als Startvektor $\vec{x}_0$ den stochastischen Fixvektor, ist die Folge konstant: $\vec{x}_k = \vec{x}_0$ für alle k. Nimmt man einen anderen Startvektor, gibt das eine Folge, bei der sich zwei Vektoren immer abwechseln. Das ist auch von der Geometrie her einleuchtend, die Matrix gehört zu einer Spiegelung der Ebene an der ersten Winkelhalbierenden $y = x$.

2. Im Käfig gleich nebenan lebt ein eher zahmes Exemplar der kritischen Gattung: Für

$$M \; = \; \begin{pmatrix} 1 & \frac{2}{3} \\ 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \quad \text{gilt} \quad M^k \quad \xrightarrow{k\to\infty} \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad ,$$

   und für jeden (stochastischen) Startvektor $\vec{x}_0$ strebt $\vec{x}_k$ gegen den ersten Einheitsvektor für k gegen Unendlich.

3. Etwas heikler ist das Exemplar

$$M \; = \; \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad .$$

[35] Die im grünen Buch auf der Seite 173 – natürlich ohne Beweis! – abgedruckte Merkregel, eine Übergangsmatrix habe eine Grenzmatrix, wenn sie genau eine stabile Verteilung hat, ist folglich falsch, wie das lebende Gegenbeispiel zeigt.

Es gibt zwar eine Grenzmatrix:

$$M^k \xrightarrow{k\to\infty} \begin{pmatrix} \frac{3}{7} & \frac{3}{7} & 0 \\ \frac{4}{7} & \frac{4}{7} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =: G$$

– aber der Fixraum hat die Dimension zwei. Für jeden Startvektor $\vec{x}_0$ konvergiert $\vec{x}_k = M\vec{x}_0$ gegen $G\vec{x}_0$, und dieser Vektor hängt von $\vec{x}_0$ ab.

Wie du siehst, kann wirklich alles Mögliche auftreten. Es gibt eine Grenzmatrix oder auch nicht; jede Folge $\vec{x}_k = M\vec{x}_0$ konvergiert oder auch nicht – und dies kann sogar von $\vec{x}_0$ abhängen. Es kann sein, dass alle Folgen $\vec{x}_k = M^k\vec{x}_0$ konvergieren, und das kann dann gegen den gleichen Grenzvektor sein, der Grenzvektor kann aber auch von $\vec{x}_0$ abhängen. Da muss man mit äußerster Vorsicht zu Werke gehen, selbst dann, wenn man – dem Zug der Zeit folgend – einfach mit dem Taschenrechner M^k für nicht zu kleine k bildet.

11.12 Technische Übung

Einer unter uns ist ein sprudelnder Quell von Ideen. Meist geht es darum, ob man nicht auf irgendeine Weise Mühe und Arbeit sparen kann, etwa wenn hinterfragt wird, ob man, wenn da steht, eine Aufgabe solle gerechnet werden, man diese Rechnung auch hinschreiben muss, denn das ist ja nicht explizit verlangt. Wenn man diese skurilen Einfälle, die eher in die amerikanische Schadensersatzprozessrechtsprechung gehören, einmal beiseite lässt, bereichert unser Freund unseren grauen Unterrichtsalltag mit Ideen, die ausgesprochen clever sind. Mir bringt das ein, dass ich interessante Hypothesen untersuchen muss, was ich zwar ganz gern tue, was aber bisweilen unangenehm viel Zeit verschlingt.

Genug des Smallltalk. Schauen wir uns den neuesten Einfall unseres Cleverle an. Den Fixraum einer stochastischen Matrix auszurechnen, ist keine vergnügliche Beschäftigung. Schön wäre doch, man könnte erzeugende Vektoren des Fixraums gleich an der Matrix ablesen. Große Zeilensummen der Matrix führen doch tendenziell zu großen Einträgen in der Komponente des Fixvektors an der entsprechenden Stelle. Kapiert? Also: Stehen in der ersten Zeile der stochastischen Matrix M große Einträge, wird der oberste Eintrag des Vektors $M\vec{x}$ begünstigt. Die Zeilensummen einer Matrix sind schnell ausgerechnet; es wäre doch genial, wenn die Einträge eines Fixvektors untereinander im gleichen Verhältnis ständen wie die des Vektors der Zeilensummen. Dann könnte man Fixvektoren gleich hinschreiben.

Ein solches Theorem wäre allemal des Schweißes der Edlen wert. Spüren wir ihm nach. Es sei M eine stochastische Matrix. Die folgenden Aufträge sind auszuführen und Resultate und Lösungswege sind aufzuschreiben.[36]

1. Finde einen Vektor $\vec{x}$ so, dass der Vektor $M\vec{x}$ gerade die Zeilensummen von M enthält.

2. Wir prüfen die Vermutung an einer handlichen Matrix. Von nun an sei

$$M = \begin{pmatrix} 1-p & q \\ p & 1-q \end{pmatrix} \quad \text{mit } 0 < p, q, \leq 1.$$

   Eigentlich solltest du das Problem in der gestellten Form lösen können. Falls du damit nicht durchkommst, nimmst du erstmal ein konkretes M: wähle konkrete Zahlen für p und q.

   (a) Berechne den Fixraum von M.

   (b) Berechne die Zeilensummen von M.

   (c) Als erzeugenden Vektor des Fixraums können wir $\binom{q}{p}$ nehmen (Nachweis!). Bestimme p und q so, dass das Verhältnis der Zeilensummen gleich dem Verhältnis der entsprechenden Einträge des erzeugenden Fixvektors ist.

   (d) Wenn Sjards Vermutung zutrifft, muss die Lösungsmenge alle Vektoren $\binom{p}{q}$ mit $0 < p, q \leq 1$ enthalten. Kommt das heraus?

   (e) Wenn du richtig gerechnet hast, hast du nur zwei Lösungen $\binom{p}{q}$ gefunden. Sjards Vermutung trifft also nicht zu, jedenfalls nicht in der Form, in der ich sie gefasst habe. Er selbst hatte, wie er mir in einem privaten Gespräch mitgeteilt hat, eigentlich eine schwächere Formulierung: Ist die Summe s_i der i–ten Zeile von M mindestens so groß wie die Summe s_j der j–ten Zeile, sollte der i–te Eintrag des Grenzvektors auch mindestens

[36] Ich hoffe mal, jetzt ist kein Schlupfloch mehr offen.

so groß sein wie der j–te Eintrag des Grenzvektors.[37] Diese schwächere Vermutung hat Sjard durch ein eigenes Beispiel gekippt.[38] Hier ist sein Beispiel:

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Begründe! Und warum kann er die Matrix nicht einfach kleiner machen?

[37] Überlegungen, ob überhaupt ein eindeutig bestimmter Grenzvektor existiert, stellen wir hintan.

[38] Und damit steht seine Note für sonstige Mitarbeit für dieses Halbjahr fest... Zu meinem Glück ist die Kultusbürokratie außer Stande, solche Phänomene wahrzunehmen, sonst hätte ich längst ein amtliches Schreiben bekommen, dass meine Arbeit in eurem Kurs ihren Lohn schon in sich trage und man deshalb von der Zahlung eines Gehaltes absehe. Schwein gehabt, verpetzt mich nicht!

11.13 Einführung von Populationsmatrizen

Wir kommen nun zu den klassischen Käferaufgaben, sie beschäftigen sich mit der Entwicklung von Populationen. Am besten hilft ein Beispiel: Wir betrachten eine Population von Käfern irgendeiner Art, und wir wollen an einem einfachen Modell studieren, wie sich die Population mit der Zeit entwickelt [wenn die Lebensumstände der Käfer in etwa gleich bleiben]. Dazu teilen wir die weiblichen Exemplare in drei Klassen ein: Larven, Jungkäfer und Altkäfer meinetwegen. Ein Käfer, der sich zum jetzigen Zeitpunkt 0 im Larvenstadium befindet, ist nach einer Zeitspanne T Jungkäfer (oder gefressen worden) und nach einer weiteren Zeitspanne T Altkäfer (oder überfahren worden). In dem klassischen Modell, das von einem gewissen Leslie in den 1940er Jahren entwickelt wurde, ist der Käfer nach einer weiteren Zeitspanne T tot.

Die Konstitution einer solchen Käferart wird durch eine Matrix beschrieben, die typischerweise so aussieht:

$$M_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 4 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 \end{pmatrix} \quad \text{oder} \quad M_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 6 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 \end{pmatrix} \quad \text{oder} \quad M_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 8 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 \end{pmatrix} .$$

Die Einträge der Matrizen sind immer noch ≥ 0, wie bei den stochastischen Matrizen, aber die Spaltensummen sind nicht mehr $= 1$, und es treten auch Werte > 1 auf, die ja keine Wahrscheinlichkeiten mehr sein können. Bedenken wir gründlich die Bedeutung der Einträge.

1. Der Eintrag $m_{21} = \frac{1}{2}$ bedeutet offensichtlich die Wahrscheinlichkeit, dass ein Käfer, der zum Zeitpunkt 0 als Larve existiert, zum Zeitpunkt T noch lebt [und dann natürlich Jungkäfer ist]. Entsprechendes gilt für den Eintrag $m_{31} = \frac{1}{3}$ in den Matrizen. Welche Beobachtungen liegen diesen Werten zu Grunde? Der Biologe beobachtet halt meinetwegen 1000 Larven der Art und stellt fest, wieviele von ihnen nach der Zeit T noch existieren, nimmt den beobachteten Anteil als Schätzwert der Überlebenswahrscheinlichkeit und schreibt ihn in die Matrix.

2. Bei den Werten m_{13} geht das ganz entsprechend. Der Biologe stellt die Gesamtzahl der Larven fest, die N Käfer, die zur Zeit 0 als Altkäfer existieren, als Nachkommen haben, und teilt diese Anzahl durch N. Dann weiß er, wie viele Nachkommen ein (weiblicher) Käfer, der zum Zeitpunkt 0 als Altkäfer lebt, im Mittel hat. Im Begriffsapparat der Stochastik liest sich das so: Die Zufallsgröße X ist die Anzahl der Nachkommen, die ein zufällig gewählter weiblicher Altkäfer im Laufe seines Lebens als Altkäfer hat, und der Erwartungswert dieser Zufallsgröße ist dann der Matrixeintrag: $m_{13} = \mathbb{E}(X)$.

Du kannst das einheitlich sehen: Die Zufallsgröße Y sei die Anzahl der Jungkäfer, die aus einer zufällig gewählten weiblichen Larve wird. Das ist nichts Anderes als die Anzahl der Erfolge eines Bernoulliversuchs, dessen Erfolgswahrscheinlichkeit p die Überlebenswahrscheinlichkeit der Larve ist. Der Erwartungswert $\mathbb{E}(Y)$ hat den Wert $1 \cdot p + 0 \cdot (1 - p) = p$, aber er bedeutet eine (mittlere) Anzahl von Käfern.

Der Rest läuft nun wie bei den stochastischen Matrizen. Besteht die Kolonie zur Zeit 0 aus x_1 Larven, x_2 Jungkäfern und x_3 Altkäfern – immer weiblichen, wohlgemerkt – dann fasst man diese Zahlen als Einträge eines Startvektors $\vec{x}_0$ auf und bildet $\vec{x}_1 = M\vec{x}_0$. Die Einträge von $\vec{x}_1$ sind dann wieder Erwartungswerte von Käferanzahlen, also „Werte im Mittel“. Heißt: Beobachtet man eine große Anzahl von Populationen mit der durch $\vec{x}_0$ gegebenen Bevölkerung, wird man nach der Zeit T im Mittel etwa die durch $\vec{x}_1$ beschriebene Besetzung beobachten.

Warnungen

1. Was für einen Biologen große Zahlen sind, interessiert uns nicht. Und denke nur ja nicht darüber nach, welchen Unterschied es macht, wenn alle Larven im Mai geboren werden gegenüber dem Ablauf bei einer tropischen Tierart, die das ganze Jahr über Junge hat! Dann öffnest du eine Büchse der Pandora, und das sollst du nicht, selbst der neugierige Sjard lässt besser die Finger davon. Bedenke: über Populationsmatrizen gibt es dicke Bücher, im grünen Buch stehen zwei Seiten darüber. Also: schaue nicht zu genau hin, sonst bekommst du Probleme.

2. Die Fragestellungen sind sehr ähnlich zu denen, die du von den stochastischen Matrizen her kennst: Entwicklung der Folge $\vec{x}_0, \vec{x}_1 = M\vec{x}_0, \ldots$ vor– und rückwärts, Existenz stabiler Zustande. Aber unsere schöne Theorie geht nicht mehr. Es gibt eben **nicht** garantiert stabile Zustände, und auch das Verhalten auf lange Sicht ist anders.

11.14 Zyklische Prozesse

Die Matrizen auf der Seite 112 waren alle vom Typ

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & c \\ a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \end{pmatrix}$$

mit positiven Zahlen a, b, c. Potenziert man M mit 3, erhält man

$$M^3 = \begin{pmatrix} abc & 0 & 0 \\ 0 & abc & 0 \\ 0 & 0 & abc \end{pmatrix} = abc \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} .$$

Falls $abc = 1$ ist, verläuft der Prozess **zyklisch**, jeder Zustandsvektor tritt nach drei Zyklen wieder auf.[39] Die Zustandsvektoren bilden eine Folge der Art

$$\vec{x}_0,\ \vec{x}_1,\ \vec{x}_2,\ \vec{x}_0,\ \vec{x}_1,\ \vec{x}_2,\ \vec{x}_0,\ \dots\ .$$

Im allgemeinen Fall ist hier

$$\vec{x}_3 = (abc)\vec{x}_0,\ \vec{x}_6 = (abc)^2\vec{x}_0,\ \dots,\ \vec{x}_{3k} = (abc)^k\vec{x}_0,\ \dots\ ,$$

für $abc < 1$ nimmt die Population exponentiell ab und stirbt aus, für $abc > 1$ wächst die Population exponentiell, und ihre Größe überschreitet im Modell alle Grenzen. Das ist in der Realität natürlich nicht möglich, weil es immer Grenzen des Wachstums gibt. Das Modell sagt ja auch nur, was passiert, wenn sich die Rahmenbedingungen nicht ändern; es dient zur Analyse der Rahmenbedingungen und weniger zur exakten Prognose über eine größere Anzahl von Zyklen.

Technische Übungen

1. Zeichne ein Übergangsdiagramm zu dem Prozess, der durch die Matrix M gegeben ist. Siehst du auch daran, dass der Prozess zyklisch verlaufen kann?
2. Rechne nach, dass M^3 tatsächlich die oben angegebene Form hat, und zeige mit dem Ergebnis formal, dass $M^3\vec{x} = abc\vec{x}$ ist.
3. Bearbeite die Aufgaben 38 und 39 auf der Seite 180f im grünen Buch.

[39] Dabei ergibt sich die Zahl 3 aus der Matrix, eine Periode kann auch eine andere Länge haben.

11.15 Einschub: Eigenwerte und Eigenvektoren

21 Definition

Eine Zahl λ heißt **Eigenwert** *einer quadratischen Matrix A, wenn es einen Vektor $\vec{x} \neq \vec{0}$ so gibt, dass*

$$A\vec{x} \;=\; \lambda\vec{x} \tag{41}$$

gilt. Ein solcher Vektor $\vec{x}$ heißt dann **Eigenvektor** *von A zum Eigenwert λ.*

Kennst du schon, nicht? Ein Fixvektor einer Matrix ist ein Eigenvektor zum Eigenwert $\lambda = 1$.

Warum interessiert man sich für Eigenvektoren? Das lässt sich leicht sagen: Die Wirkung einer Matrix auf einen Eigenvektor ist genial übersichtlich. Es ist im allgemeinen sehr misslich, wenn man etwas über $A^{100}\vec{x}$ aussagen will für eine quadratische Matrix A und einen Vektor $\vec{x}$ passender Größe. Man muss A^{100} ausrechnen, und das ist kein Spaß, oder A hundertmal anwenden, und das zwar weniger Rechenarbeit als wenn man A^{100} berechnet, aber es ist noch lästig genug. Ist $\vec{x}$ jedoch Eigenvektor von A zum Eigenwert λ, sind wir schnell fertig: Dann ist $A^k\vec{x} = \lambda^k\vec{x}$ für alle $k \in \mathbb{N}$. Das geht auch noch für eine Linearkombination von Eigenvektoren $\vec{v}_1$ zum Eigenwert λ_1 und $\vec{v}_2$ zum Eigenwert λ_2 von A. Dann ist nämlich

$$A^k(r_1\vec{v}_1 + r_2\vec{v}_2) \;=\; r_1A^k\vec{v}_1 + r_2A^k\vec{v}_2 \;=\; \lambda_1^k r_1\vec{v}_1 + \lambda_2^k r_2\vec{v}_2$$

– das kann man so hinschreiben.

Bevor wir uns anschauen, was das Konzept uns noch an neuen Einsichten bringt, nehmen wir uns ein konkretes Beispiel vor. Es sei

$$A \;=\; \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}.$$

Der Ansatz $A\vec{x} = \lambda\vec{x}$ führt über $A\vec{x} - \lambda\vec{x} = \vec{0}$ zu

$$(A - \lambda E)\vec{x} \;=\; \vec{0} \tag{42}$$

mit der Einheitsmatrix E der passenden Größe. Das ist hier ein homogenes LGS, seine Größe wird durch die Größe von A bestimmt.[40] Damit nichts schief geht, schreibe ich das LGS aus. Im allgemeinen Fall sieht das so aus:

$$\left.\begin{array}{ccccc} a_{11}-\lambda & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33}-\lambda & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn}-\lambda \end{array}\right| \begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{array} \tag{43}$$

Für unser konkretes A ergibt sich dieses LGS:

$$\left.\begin{array}{cc} \frac{1}{2}-\lambda & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & \frac{2}{3}-\lambda \end{array}\right| \begin{array}{c} 0 \\ 0 \end{array} \tag{44}$$

Man kann nun mit Zeilenumformungen arbeiten, muss aber mit λ–haltigen Vorfaktoren multiplizieren. Fachleute machen das nicht, sondern argumentieren so: Das LGS $(A - \lambda E) = \vec{0}$ hat dann und nur dann von $\vec{0}$ verschiedene Lösungen, wenn die

[40] Streng genommen ist es eine unendliche Schar homogener LGS mit dem Scharparameter λ.

Spaltenvektoren der Koeffizientenmatrix $A - \lambda E$ linear abhängig sind, und das ist genau dann der Fall, wenn die Determinante dieser Matrix den Wert 0 hat. Folglich ist λ genau dann Eigenwert von A, wenn

$$\det(A - \lambda E) \;=\; 0 \tag{45}$$

ist.

Die linke Seite dieser Gleichung heißt **charakteristisches Polynom** der Matrix A, aber das brauchst du dir nicht zu merken. Für unser kleines A können wir es ausrechnen:

$$\begin{aligned}\det(A - \lambda E) \;&=\; \det\begin{pmatrix}\frac{1}{2}-\lambda & \frac{1}{3}\\ \frac{1}{2} & \frac{2}{3}-\lambda\end{pmatrix}\\ &=\; \left(\frac{1}{2}-\lambda\right)\left(\frac{2}{3}-\lambda\right) - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}\\ &=\; \lambda^2 - \frac{7}{6}\lambda + \frac{1}{6}\end{aligned}$$

Das ist ein Polynom [=Term einer ganzrationalen Funktion] vom Grad 2, seine Nullstellen bekommen wir mit der *pq*–Formel:

$$\begin{aligned}\lambda \;&=\; \frac{7}{12} \pm \sqrt{\frac{49}{144} - \frac{1}{6}}\\ &=\; \frac{7}{12} \pm \frac{5}{12}\end{aligned}$$

Die Eigenwerte von A sind folglich 1 und $\frac{1}{6}$. Wir berechnen die Eigenvektoren dazu, indem wir in Gleichung (44) jeweils λ durch den berechneten Wert ersetzen. Das liefert die LGS

$$\begin{array}{cc|c} -\frac{1}{2} & \frac{1}{3} & 0\\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{3} & 0\end{array} \quad \text{für } \lambda = 1 \text{ mit der Lösungsmenge} \quad \left\langle \begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}\right\rangle$$

und

$$\begin{array}{cc|c} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0\\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0\end{array} \quad \text{für } \lambda = \frac{1}{6} \text{ mit der Lösungsmenge} \quad \left\langle \begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}\right\rangle \quad .$$

Nebenbei: Dass 1 als Eigenwert auftauchen musste, war klar; jede stochastische Matrix hat Fixvektoren, also 1 als Eigenwert. Aber nun zu der angekündigten tieferen Einsicht in das Verhalten stochastischer Matrizen. Es sei $\vec{x}_0 \in \mathbb{R}^2$ ein Startvektor, stochastisch oder nicht, das ist egal. Da die Eigenvektoren

$$\vec{v}_1 \;=\; \begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad \vec{v}_2 \;=\; \begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}$$

linear unabhängig sind – das sind Eigenvektoren einer Matrix zu verschiedenen Eigenwerten immer[41] – können wir $\vec{x}_0$ als Linearkombination dieser Vektoren schreiben:

$$\vec{x}_0 \;=\; r_1\vec{v}_1 + r_2\vec{v}_2$$

[41]Siehe 11.16 auf Seite 118

Dann ist

$$\begin{aligned}
\vec{x}_k \;=\; A^k \vec{x}_0 \;=\; A^k(r_1\vec{v}_1 + r_2\vec{v}_2) \;&=\; r_1 A^k \vec{v}_1 + r_2 A^k \vec{v}_2 \\
&=\; r_1 \cdot 1^k \cdot \vec{v}_1 + r_2 \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^k \cdot \vec{v}_2 \\
&\xrightarrow{k\to\infty}\; r_1 \vec{v}_1 \quad .
\end{aligned}$$

Technische Übung

1. Berechne die Vorfaktoren r_1 und r_2 der Darstellung

   $$\vec{x}_0 \;=\; r_1 \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} + r_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{am Ende des Kapitels konkret für} \quad \vec{x}_0 \;=\; \begin{pmatrix} 0 \\ 10 \end{pmatrix}$$

   und zeichne die Punkte zu $\vec{x}_0$ und zu $\vec{x}_k = A^k \vec{x}_0$ für $k = 1, 2, \ldots$. Wohin strebt $\vec{x}_k$ für k gegen Unendlich? [Am besten zeichnest du auch die Zerlegung von $\vec{x}_0$ mit ein, die du ausgerechnet hast!]

2. Was bedeutet $A\vec{x} = \lambda\vec{x}$ geometrisch?

3. Bestimme Eigenwerte und Eigenvektoren der Matrix

   $$A \;:=\; \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 1 \\ \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} \quad .$$

4. Erinnere dich an die geometrische Bedeutung der Abbildung $\vec{x} \mapsto A\vec{x}$ mit

   $$A \;:=\; \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

   und suche nach Eigenwerten der Matrix A.

5. Was bedeutet es, wenn eine quadratische Matrix den Eigenwert 0 hat?

6. Bestimme Eigenwerte und Eigenvektoren der Matrizen

   $$A \;:=\; \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad B \;:=\; \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \quad .$$

7. Blicke noch einmal auf die Beispiele. Schon bei den kleinen 2×2–Matrizen kann, was die Anzahl der Eigenwerte und die Dimensionen der zugehörigen Eigenräume betrifft, alles Mögliche passieren. Stelle mal die Fälle zusammen!

11.16 Lineare Unabhängigkeit von Eigenvektoren

Eigenvektoren zu verschiedenen Eigenwerten sind linear unabhängig, so sagt man etwas salopp. Präziser formuliert liest sich das so:

22 Satz
Es seien $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_n$ Eigenvektoren einer Matrix A, und die zugehörigen Eigenwerte seien paarweise verschieden. Dann ist das Vektorsystem $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_n$ linear unabhängig.

Es geht mir darum, dass du noch einmal siehst, was Eigenwerte und Eigenvektoren bedeuten und wie man damit umgeht; deshalb bringe ich diesen Satz. Der Satz gilt so, wie er da steht. Um den Beweis einfach und übersichlich zu halten, verlange ich, dass auch die Beträge der Eigenwerte paarweise verschieden sind, also nicht etwa 2 und -2 als Eigenwerte vorkommen. Diese Voraussetzung ist etwas schärfer als die im Satz.

Beweis. Die Eigenwerte seien der Größe ihrer Beträge nach geordnet, es sei also o.B.d.A.[42]

$$|\lambda_1| \;<\; |\lambda_2| \;<\; \ldots \;<\; |\lambda_n| \;\; .$$

Wie es beim Nachweis linearer Unabhängigkeit üblich ist, schauen wir uns eine Linearkombiantion der $\vec{v}_j$ an, die den Nullvektor ergibt:

$$r_1\vec{v}_1 + r_2\vec{v}_2 + \;\ldots\; + r_n\vec{v}_n \;=\; \vec{0} \tag{46}$$

Wir wenden auf beide Seiten A^k an und nutzen aus, dass die $\vec{v}_k$ Eigenvektoren sind. Das ergibt[43]

$$r_1\lambda_1^k\vec{v}_1 + r_2\lambda_2^k\vec{v}_2 + \;\ldots\; + r_n\lambda_n^k\vec{v}_n \;=\; \vec{0} \;\; .$$

Wir dividieren nun durch λ_n^k:

$$r_1\left(\frac{\lambda_1}{\lambda_n}\right)^k\vec{v}_1 + r_2\left(\frac{\lambda_2}{\lambda_n}\right)^k\vec{v}_2 + \;\ldots\; + r_{n-1}\left(\frac{\lambda_{n-1}}{\lambda_n}\right)^k + r_n\vec{v}_n \;=\; \vec{0}$$

und lassen k gegen Unendlich laufen. Die ersten $n-1$ Quotienten λ_j/λ_n sind alle betragsmäßig kleiner als 1, ihre k–ten Potenzen gehen gegen Null. Auf der linken Seite bleibt nur $r_n\vec{v}_n$, auf der rechten Seite steht die ganze Zeit untätig der Nullvektor. Es folgt

$$r_n\vec{v}_n = \vec{0} \;\; ,$$

und daraus ergibt sich, da Eigenvektoren vom Nullvektor verschieden sind, $r_n = 0$.

In gleicher Weise nimmt man sich nun $\vec{v}_{n-1}$ vor und zeigt $r_{n-1} = 0$, und so weiter, bis zu $\vec{v}_2$ und $r_2 = 0$. Dann ist bloß noch $r_1\vec{v}_1 = \vec{0}$ übrig, und dies ergibt $r_1 = 0$ ohne dass wir dividieren müssen, und das ist gut, denn es könnte ja $\lambda_1 = 0$ sein.

Damit ist gezeigt, dass Gleichung (46) nur gelten kann, wenn

$$r_1 = r_2 = \ldots = r_n \;=\; 0$$

ist: das System $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_n$ ist linear unabhängig. □

[42]„Ohne Beschränkung der Allgemeinheit" heißt das, und hier will man damit sagen, dass man die Vektoren und die Eigenwerte ja notfalls umnummerieren kann. Man macht hier keine zusätzliche Voraussetzung.

[43]Dieser Schritt ist der Kern der Sache. Es muss dir absolut klar sein, was da passiert ist.

11.17 Nachdenken über Orthogonalität

Beginnen wir mit einer stumpfen **Rechenaufgabe:** Wende auf die Spaltenvektoren der Matrix

$$A := \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

das Orthogonalisierungsverfahren an.

Das musst du nun auch wirklich durchrechnen, bevor du weiterliest!

Man verrechnet sich unglaublich leicht, wenn man das Gram–Schmidt–Verfahren zu Fuß durchrechnet, und trotz der verbraucherfreundlichen Werte in den Ausgangsvektoren stehen im dritten neuen Vektor schon krumme Zahlen. Sei es drum. Du hast nun etwas Technik für die Klausur wiederholt, aber euch treibt immer die Frage um, was das Ganze eigentlich soll.

Ein erster Hinweis steckt in zwei weiteren stumpfen Rechenaufgaben:
Aufgabe 2. Berechne die Determinante von A.
Aufgabe 3. Multipliziere die Längen der neuen Basisvektoren.[44]

Wenn du das alles richtig ausgerechnet hast und dann nach dem geometrischen Hintergrund fragst, mag dir ein Licht aufgehen.

Nach diesem ersten Gang kommt nun das Hauptgericht.[45] Der Raum soll um die vom ersten Spaltenvektor $\vec{a}_1$ der Matrix A oben erzeugte Gerade um 90° gedreht werden. Wir suchen eine Vorschrift, die uns zu einem Raumpunkt X den Bildpunkt X' unter dieser Drehung liefert.[46]

Ich skizziere einen Weg zur Lösung. Er besteht aus mehreren Schritten.
Aufgabe 4. Bestimme einen einfachen Vektor $\vec{a}_2 \neq \vec{0}$, der zu $\vec{a}_1$ orthogonal ist.
Aufgabe 5. Bestimme einen Vektor $\vec{a}_3 \neq \vec{0}$, der zu $\vec{a}_1$ und zu $\vec{a}_2$ orthogonal ist, und bringe $\vec{a}_2$ und $\vec{a}_3$ auf die gleiche Länge, indem du sie mit geeigneten Faktoren multiplizierst.
Aufgabe 6. Es ist klar, wie die Drehung auf die Vektoren $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$ wirkt – schreibe das auf.

Nun muss ich leider Matthies' Vorfreude etwas trüben. Wir dürfen die Bildvektoren der $\vec{a}_j$ nicht einfach in eine Matrix schreiben, weil die $\vec{a}_j$ nicht die Einheitsvektoren des Raums sind. Den Bildvektor eines beliebigen Vektors $\vec{x}$ können wir aber leicht bekommen, wenn wir $\vec{x}$ als Linearkombination

$$\vec{x} = r_1\vec{a}_1 + r_2\vec{a}_2 + r_3\vec{a}_3$$

schreiben. Und das ist leicht, weil ja die $\vec{a}_j$ paarweise orthogonal sind. Wir brauchen nicht für jedes neue $\vec{x}$ ein 3×3–LGS zu lösen, ein paar Skalarprodukte reichen aus.

Aufgabe 7. Berechne den Bildvektor des Einheitsvektors $\vec{e}_1$ unter der Drehung.

[44] Für den Fall, dass du die neuen Basisvektoren trotz der mahnenden Worte doch nicht ausgerechnet hast – sicher durch höhere Mächte gehindert – ist hier die Matrix mit der neuen Basis:

$$(\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & \frac{3}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & \frac{3}{2} \end{pmatrix} .$$

[45] Das Projekt kommt deiner mathematischen Bildung zugute, ist aber nicht Klausurstoff.

[46] Den Drehsinn lasse ich offen, um die Sache einfacher zu halten. Es gibt dann natürlich zwei Lösungen der Aufgabe.

Wenn du das erledigt hast, kommt Matthies doch noch zum Zuge, und du kannst einen Teil der Matrix der Drehung hinschreiben. Wenn du die komplette Drehmatrix haben willst, brauchst du nur noch die Bildvektoren der beiden übrigen Einheitsvektoren auszurechnen. Aber das brauchst du meinetwegen nicht zu machen, du solltest nun auch so schon etwas mehr von der Nützlichkeit des Begriffs der Orthogonalität überzeugt sein.

12 Klausur Nr. 7 am 16. Februar 2016

1. **Käferaufgabe**
   Der Leiter des König–Alfons–Gymnasiums in Lummerland hat seinen Bericht für den Schulinspektor fertig. So funktioniert die Oberstufe am KAG: Sind zu Beginn eines Schuljahres x_1 Schüler in der EF, x_2 Schüler in der Q1 und x_3 Schüler in der Q2, bekommt man die entsprechenden Anzahlen zu Beginn des nächsten Schuljahres nach der Vorschrift

$$\varphi: \vec{x} \mapsto M\vec{x} + \vec{b} \quad \text{mit} \quad M = \begin{pmatrix} 0.1 & 0 & 0 \\ 0.9 & 0.1 & 0 \\ 0 & 0.9 & 0.1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 180 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} .$$

   (a) Erläutere dem Inspektor die Bedeutung der Einträge in der ersten Spalte von M und die Bedeutung von $\vec{b}$ im Sachzusammenhang. [5]

   (b) Zeichne ein Übergangsdiagramm zu dem Prozess, der durch $\vec{x} \mapsto M\vec{x}$ gegeben ist. [4]

   (c) In Lummerland gilt das Prinzip „no child left behind“ in der strengsten Form: Niemand, der in die Oberstufe eintritt, darf die Schule ohne Abitur verlassen. Wo findet der Inspektor in der Matrix Hinweise darauf, dass das Prinzip am KAG umgesetzt wird? [4]

   (d) Mit welcher Wahrscheinlichkeit durchläuft ein Schüler, der in die Oberstufe eintritt, diese in drei Jahren? [4]

   (e) Mit welcher Wahrscheinlichkeit braucht ein Schüler genau vier Jahre vom Eintritt in die Oberstufe bis zum Abitur? [6]

   (f) Existiert eine Grenzmatrix G von M^k für k gegen Unendlich? Gib eine möglichst präzise Antwort und mache sie plausibel. Ein strenger Nachweis ist nicht verlangt. [6+]

   (g) Untersuche φ auf stabile Verteilungen. [16]

2. **Stochastische Matrizen.** Gegeben sei die Matrix

$$M := \begin{pmatrix} 0.6 & 0.2 & 0.4 \\ 0.2 & 0.6 & 0.4 \\ 0.2 & 0.2 & 0.2 \end{pmatrix} .$$

   (a) Begründe, dass M stochastische Matrix ist. [2]

   (b) Bestimme einen Kandidaten für eine Grenzmatrix G von M^k. [18]

   (c) Schreibe hin, warum wir sicher sind, dass hier M^k gegen eine Grenzmatrix G strebt, und gib an, was der Spaltenvektor $\vec{g}$ von G für die übliche Folge $\vec{x}_k = M^k\vec{x}_0$ bedeutet. [10]

   (d) Wie groß muss k mindestens sein, damit der Unterschied zweier Einträge einer beliebigen Zeile von M^k garantiert höchstens 0.0001 ist? [8+]

(e) Zeichne die beiden Dreiecke, die durch die Einheitsvektoren und durch die Spaltenvektoren von M gegeben sind, in ein Schaubild. Verwende dabei die Matrix

$$P := \begin{pmatrix} -10 & 0 & 10 \\ -5 & 5 & -5 \end{pmatrix}$$

zur Umrechnung der räumlichen Koordinaten in die Koordinaten des Kästchensystems [Einheit dort: 1 Kästchen]. [14]

(f) Welche Rolle spielen die Dreiecke im Kontext der stochastischen Matrizen? [6]

3. **Vermischtes**

(a) Berechne die Determinante der Matrix [4]

$$M := \begin{pmatrix} 7 & 3 \\ -15 & -\frac{13}{2} \end{pmatrix} .$$

(b) Berechne die Eigenwerte dieser Matrix M. [14]

(c) Berechne einen Eigenvektor von M zum Eigenwert $\lambda = -\frac{1}{2}$. [6]

(d) Es seien $\vec{v}_1$ bzw. $\vec{v}_2$ Eigenvektoren einer Matrix A zu den Eigenwerten $\lambda_1 = 1$ und $\lambda_2 = -\frac{1}{2}$, und es sei $\vec{x}_0 = \vec{v}_1 + \vec{v}_2$. Berechne $A\vec{x}_0$ und gib den Grenzvektor für k gegen Unendlich von $A^k\vec{x}_0$ an. [12]

(e) Es seien $A(1|-2|3)$ und $B(-1|3|-1)$ zwei Raumpunkte und $V := \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle$ das Erzeugnis ihrer Ortsvektoren.

i. Was ist V geometrisch? [3]

ii. Bestimme

$$V_\perp = \{ \vec{x} \in \mathbb{R}^3 \,|\, \vec{x} * \vec{v} = 0 \quad \text{für alle } \vec{v} \in V \}$$

und deute $V_\perp$ geometrisch. [10]

iii. Der Vektor $\vec{b}$ soll durch einen anderen erzeugenden Vektor $\vec{b}\,'$ von V ersetzt werden, der zu $\vec{a}$ orthogonal ist. Finde so ein $\vec{b}\,'$. [10]

(f) Ein System $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_m$ sei linear unabhängig. Was bedeutet das im Kern? [Schreibe jetzt nicht die formale Definition aus der Formelsammlung ab, die will ich hier nicht.] [4]

(g) Begründe durch Rückgriff auf die formale Definition, dass ein System $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_m$ paarweise orthogonaler Vektoren des $\mathbb{R}^n$, von denen keiner der Nullvektor ist, linear unabhängig ist. [8+]

(h) Schließlich: Berechne

$$\int_0^\pi x \sin(5x)\, dx$$

und erläutere in ein paar Zeilen, was das Integral in dieser Klausur zu suchen hat. [Hinweis: Wenn du nur einen Taschenrechnerwert für das Integral anbringst, bekommst du nicht die volle Punktzahl] [16+]

13 Rückblick: Lineare Unabhängigkeit

Eure Klausuren zeigten mir, dass wir uns diesen schwierigen Begriff noch einmal vornehmen sollten!

Man sagt zwar, Vektoren seien linear unabhängig, aber lineare Unabhängigkeit ist eigentlich eine Eigenschaft, die nur ein System

$$\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n \tag{47}$$

von Vektoren haben kann. Das **Erzeugnis**

$$V \;=\; \langle\, \vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n \,\rangle$$

ist die Menge aller Linearkombination der $\vec{a}_k$, und das System $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n$ bildet ein Erzeugendensystem des Erzeugnisses V. Das Erzeugnis eines einzelnen Vektors $\neq \vec{0}$ ist geometrisch so etwas wie eine Gerade, und so weiter, das kennst du ja.

Manchmal enthält das Erzeugendensystem überflüssige Vektoren; man kann sie weglassen, ohne dass das **Erzeugnis** kleiner wird, weil man sie als Linearkombinationen der übrigen $\vec{a}_k$ schreiben kann. Wie gesagt, das Erzeugnis bleibt unverändert, wenn man überflüssige Vektoren weglässt, das Erzeugenden**system** wird natürlich kleiner.

Ein Erzeugendensystem ohne überflüssige Vektoren heißt minimales Erzeugendensystem oder **Basis** von V, und die Anzahl der Vektoren des Systems ist die Dimension $\dim(V)$ des Erzeugnisses. Je zwei minimale Erzeugendensysteme von V haben die gleiche Anzahl von Vektoren, eben $\dim(V)$ Stück.

Das ist die inhaltliche Seite des Begriffs, und mit dem kamt ihr halbwegs klar. Schwieriger ist die formale Seite. Wenn man für ein gegebenes Vektorsystem wie in (47) überprüfen will, ob es linear unabhängig ist, bildet man eine Linearkombination der Vektoren des Systems und setzt sie gleich dem Nullvektor:

$$r_1\vec{a}_1 + r_2\vec{a}_2 + \ldots + r_n\vec{a}_n \;=\; \vec{0}$$

Diese Gleichung darf **nur** erfüllt sein, wenn $r_1 = r_2 = \ldots = r_n \;=\; 0$ ist. Es muss also gelten:[47]

$$r_1\vec{a}_1 + r_2\vec{a}_2 + \ldots + r_n\vec{a}_n \;=\; \vec{0} \quad\Longrightarrow\quad r_1 = r_2 = \ldots = r_n \;=\; 0 \tag{48}$$

Das Zeichen $\Longrightarrow$ bedeutet: Wenn das vor dem Zeichen gilt, muss zwingend auch das gelten, was hinter dem Zeichen steht. Wer das Zeug aus der Zeile (48) hinschreibt und das Zeichen $\Longrightarrow$ weglässt oder dafür ein „und“ schreibt, hat das Wesentliche der Angelegenheit überhaupt nicht verstanden und ließe besser die Finger davon, das muss ich euch ganz deutlich sagen.

Zur Einübung des Begriffes stellen wir jetzt noch etwas damit an und ernten nebenbei noch etwas Neues. Und zwar wollen wir davon ausgehen, dass es sich bei dem System $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n$ um ein System linear unabhängiger Vektoren des $\mathbb{R}^n$ handelt. Dann ist

$$A \;=\; (\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n)$$

eine $n \times n$–Matrix mit linear unabhängigen Spaltenvektoren.

[47] Oft wird dieses Kriterium als Definition der linearen Unabhängigkeit verwandt.

1. Dass das Vektorsystem $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n$ linear unabhängig ist, heißt nun, dass die Gleichung
$$r_1\vec{a}_1 + r_2\vec{a}_2 + \ldots + r_n\vec{a}_n \;=\; \vec{0}$$
nur die Lösung $r_1 = r_2 = \ldots = r_n = 0$ hat, und das heißt, dass das homogene LGS
$$A\vec{x} \;=\; \vec{0}$$
nur die Lösung $\vec{x} = \vec{0}$ hat, und das heißt wiederum, dass man bei der Lösung des LGS links eine vollständige Treppenform erhält.

2. Letzteres hat zur Folge, dass jedes der n inhomogenen LGS
$$A\vec{x} \;=\; \vec{e}_k$$
je genau eine Lösung $\vec{b}_k$ hat für $k = 1, 2, \ldots, n$. Es gibt somit Vektoren $\vec{b}_1, \vec{b}_2, \ldots, \vec{b}_n$ so, dass $A\vec{b}_k = \vec{e}_k$ ist für $k = 1, 2, \ldots, n$, und diese $\vec{b}_k$ sind eindeutig bestimmt.

3. Wir wollen nachweisen, dass das System $\vec{b}_1, \vec{b}_2, \ldots, \vec{b}_n$ linear unabhängig ist. Wie geht das? Wir setzen eine Linearkombination der $\vec{b}_k$ gleich dem Nullvektor:
$$s_1\vec{b}_1 + s_2\vec{b}_2 + \ldots + s_n\vec{b}_n \;=\; \vec{0}$$
und müssen nun zeigen, dass zwingend alle $s_k = 0$ sind. Dazu wenden wir die Matrix A auf beide Seiten der Gleichung an. Aus der linken Seite wird
$$\begin{aligned} A(s_1\vec{b}_1 + s_2\vec{b}_2 + \ldots + s_n\vec{b}_n) &= s_1A\vec{b}_1 + s_2A\vec{b}_2 + \ldots + s_nA\vec{b}_n \\ &= s_1\vec{e}_1 + s_2\vec{e}_2 + \ldots + s_n\vec{e}_n \\ &= \begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \\ \vdots \\ s_n \end{pmatrix} \quad . \end{aligned}$$
Da auf der rechten Seite $A\vec{0}$ steht, also $\vec{0}$, folgt $s_1 = s_2 = \ldots = s_n = 0$, und damit ist die lineare Unabhängigkeit des Systems $\vec{b}_1, \vec{b}_2, \ldots, \vec{b}_n$ nachgewiesen.

4. Folglich ist $B = (\vec{b}_1, \vec{b}_2, \ldots, \vec{b}_n)$ eine $n \times n$–Matrix mit linear unabhängigen Spaltenvektoren, und wenn wir mit dieser neuen Matrix das Gleiche anstellen wie vorhin mit A, erhalten wir eine weitere Matrix $C = (\vec{c}_1, \vec{c}_2, \ldots, \vec{c}_n)$ mit $B\vec{c}_k = \vec{e}_k$ für $k = 1, 2, \ldots, n$.

5. Fassen wir zusammen: Zu unserer Matrix A haben wir eine Matrix B gefunden, für die
$$AB \;=\; A(\vec{b}_1, \vec{b}_2, \ldots, \vec{b}_n) \;=\; (A\vec{b}_1, A\vec{b}_2, \ldots, A\vec{b}_n) \;=\; (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots \vec{e}_n)$$
die $n \times n$–Einheitsmatrix E_n ist. Genauso ist $BC = E_n$.

6. Jetzt wollen wir den Sack zubinden und die Ernte einfahren. Es ist einerseits
$$ABC \;=\; (AB)C \;=\; E_nC \;=\; C$$
und andererseits
$$ABC \;=\; A(BC) \;=\; AE_n \;=\; A \quad ,$$
folglich gilt $A = C$.

Man muss nun nicht mehr viel tun, damit dieser Satz bewiesen ist:

23 Satz
Es sei A eine quadratische Matrix mit linear unabhängigen Spaltenvektoren. Dann gibt es genau eine Matrix A^{-1}, für die

$$AA^{-1} = A^{-1}A = E$$

die Einheitsmatrix E der Größe von A ergibt. Man nennt A **invertierbar** *und A^{-1} die* **inverse Matrix** *von A.*

Es ist allerdings eine mühselige Angelegenheit, inverse Matrizen per Hand auszurechnen. In der Theorie ist A^{-1} sehr nützlich: Für eine quadratische Matrix A mit linear unabhängigen Spaltenvektoren – also ein invertierbares A – hat die Gleichung $A\vec{x} = \vec{b}$ die Lösung $\vec{x} = A^{-1}\vec{b}$. Bei den Käferaufgaben ist manchmal nach dem Zustand $\vec{x}_{-1}$ vor dem Startzustand $\vec{x}_0$ gefragt. Für invertierbares M ist dann $\vec{x}_{-1} = M^{-1}\vec{x}_0$. Wenn du das M schon in den Taschenrechner eingegeben hast, hast du auch Zugriff auf M^{-1}. Nur gib Acht: Bei Zahlen darf man einfach teilen, bei Matrizen musst du das M^{-1} **von links** auf $\vec{x}_0$ anwenden. Wenn du den Taschenrechner hier einsetzen willst, solltest du das allerdings besser nicht das erste Mal in der Abiturklausur probieren!

13.1 Technische Übungen

1. Berechne die inverse Matrix zu
$$A := \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 11 \end{pmatrix} .$$

2. Rechne nach, dass
$$\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} d & -c \\ -b & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ad-bc & 0 \\ 0 & ad-bc \end{pmatrix}$$
gilt, und schließe daraus, dass für $A := \left(\begin{smallmatrix} a & c \\ b & d \end{smallmatrix}\right)$ mit $\det(A) \neq 0$ die inverse Matrix A^{-1} einfach
$$A^{-1} = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \begin{pmatrix} d & -c \\ -b & a \end{pmatrix}$$
ist. [Leider gibt es für größere Matrizen nicht so eine einfache Regel]

3. Die Matrix
$$M := \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$$
ist offensichtlich stochastisch.
   (a) Berechne die Vektoren $\vec{x}_1$ und $\vec{x}_{-1}$ für $\vec{x}_0 = \vec{e}_1$.
   (b) Begründe, dass M^k für $k \to \infty$ gegen eine Grenzmatrix G strebt, und berechne G.
   (c) Berechne M^{-1}. Was kommt heraus, wenn man M^{-1} auf den Spaltenvektor $\vec{g}$ von G anwendet?

4. Es sei A eine invertierbare quadratische Matrix und $\vec{v}$ ein Eigenvektor von A zum Eigenwert $\lambda \neq 0$. Kannst du Eigenvektoren und Eigenwerte zu A^{-1} und zu A^k angeben?

5. Berechne die inverse Matrix zu
$$D(\alpha) := \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix}$$
und überlege dir, was $D(\alpha)$ und $D^{-1}(\alpha)$ geometrisch bedeuten.

6. Kann die inverse Matrix einer stochastischen Matrix wieder stochastisch sein?

14 Rückblick: Käferaufgaben

14.1 Noch einmal grob, um was es geht

Häufig hat man folgende Konstellation: Der Zustand eines System nach k Zeitschritten wird durch einen Vektor $\vec{x}_k \in \mathbb{R}^n$ beschrieben. Nach einem Zeitschritt gilt ein neuer Vektor $\vec{x}_{k+1}$, und der Wechsel wird durch eine feste $n \times n$–Übergangsmatrix A kontrolliert:

$$\vec{x}_{k+1} \;=\; A\vec{x}_k$$

Sowohl die Matrix A als auch die Zustandsvektoren $\vec{x}_k$ sind **nichtnegativ**, das heißt, sämtliche Einträge sind ≥ 0.

Standardbeispiele.

1. In einer Stadt unterscheidet man drei Arten von Wetter, wir bezeichnen sie einfach mit $1, 2$ und 3. Der Eintrag a_{ij} der Übergangsmatrix A gibt die (bedingte!) Wahrscheinlichkeit an, dass morgen das Wetter i herrscht, wenn heute das Wetter j ist.

2. Ein Autoverleiher hat drei Standorte, die wir auch wieder mit $1, 2$ und 3 bezeichnen. Der Eintrag a_{ij} der Matrix gibt die (bedingte!) Wahrscheinlichkeit an, dass ein Auto morgen am Standort i ist, wenn es sich heute am Standort j befindet. Die Einträge der Zustandsvektoren $\vec{x}_k$ sind Erwartungswerte der Anzahlen von Autos an den Standorten.

3. In einem Wolfsrudel unterscheidet man Welpen, Jungtiere und Alttiere. In der ersten Zeile der Übergangsmatrix stehen Erwartungswerte der Anzahlen neuer Welpen, in den übrigen Überlebenswahrscheinlichkeiten. Die Einträge der $\vec{x}_k$ sind (Erwartungswerte von) Anzahlen von Tieren.

14.2 Typische Eigenschaften von Übergangsmatrizen

Es wurde schon gesagt, dass die Übergangsmatrizen **nichtnegativ** sind. Hier sind noch zwei Eigenschaften (V1) und (V2), die eine solche Matrix A haben kann:

(V1) Jeder der n Grundzustände ist von jedem aus erreichbar. Formal: Zu jedem der Einheitsvektoren $\vec{e}_j \in \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n\}$ als Startvektor und zu jedem $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ gibt es ein k so, dass der i–te Eintrag von $A^k\vec{e}_j$ positiv ist.[48]

(V2) Es gibt ein k so, dass alle Einträge von A^k positiv sind.[49]

Anmerkung Aus (V2) folgt (V1): Ganz gleich, in welchem Grundzustand $\vec{e}_j$ sich das System gerade befindet, kann es nach k Schritten in jedem der n Grundzustände sein. Falls A die Eigenschaft (V2) hat, sind spätestens ab $k = n^2 - 2n + 2$ alle Einträge in A^k positiv ([H], Bemerkung 1.18 auf S. 371). Diese Schranke brauchst du dir nicht zu merken, nur, dass sie recht klein ist.

[48] Die Matrix A heißt dann **irreduzibel**. ([H], Def. 1.3 auf S. 352 und Hilfssatz 1.5 auf S. 353) [Zum Nachschlagen gebe ich hier an, wo man die Theorie professionell dargestellt findet: Bertram Huppert, Angewandte Lineare Algebra, de Gruyter–Verlag, abgekürzt mit [H]. Das Buch ist allerdings nicht für Schüler geschrieben]

[49] Die Matrix A heißt dann **primitiv**. Siehe [H], Def. 1.14 auf S. 368 und Satz 1.16 auf S. 371.

14.3 Sammlung nützlicher Aussagen der Theorie

Wir können die meisten dieser Aussagen nicht mit vertretbarem Aufwand selbst beweisen. Das ist misslich, aber nicht zu ändern.

Entscheidend für die zeitliche Entwicklung des Prozesses sind die **Eigenwerte** und **Eigenvektoren** der Matrix A, also Zahlen $\lambda \in \mathbb{R}$ und von $\vec{0}$ verschiedene Vektoren $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ mit

$$A\vec{x} \ = \ \lambda\vec{x} \ \ .$$

Unter der Matrixabbildung $\vec{x} \mapsto A\vec{x}$ bleibt die von einem Eigenvektor $\vec{x}$ erzeugte Gerade durch den Nullpunkt (als Ganzes) invariant. In den Anwendungsaufgaben, mit denen du zu tun hast, geht es allermeistens nur um den Eigenwert $\lambda = 1$, also um **Fixvektoren** $\vec{x} \neq \vec{0}$ mit $A\vec{x} = \vec{x}$.

In den Aussagen der Theorie, die jetzt folgen, spielt eine Kennzahl $r(A) \geq 0$ der Matrix A eine Rolle, das ist der sogenannte Spektralradius ([H], Def. 2.6 auf S. 80) . Du musst aber nicht genau wissen, was das ist, nur vielleicht, dass A keinen (betragsmäßig) größeren Eigenwert als $r(A)$ haben kann.

1. **Für beliebige nichtnegative Matrizen gilt**[50]:

   (a) Die Matrix A hat einen Eigenwert $r(A) \geq 0$, und zu dem gibt es einen Eigenvektor $\vec{x} \neq \vec{0}$, dessen Einträge sämtlich ≥ 0 sind. [Das ist wichtig, denn nur solche Vektoren können wir brauchen]

   (b) Dieses $r(A)$ ist höchstens so groß wie die größte Zeilensumme von A.

2. **Falls A die Eigenschaft (V1) hat, gilt zusätzlich**[51]:

   (a) $r(A)$ ist positiv,

   (b) der Eigenraum zu $r(A)$ ist eindimensional,

   (c) und $r(A)$ ist der einzige reelle Eigenwert, der einen Fixvektor $\vec{x} \neq \vec{0}$ besitzt, dessen sämtliche Einträge ≥ 0 sind,

3. **Falls A sogar die Eigenschaft (V2) hat, gilt zusätzlich**[52]:
   Es gibt eine **Grenzmatrix** G. Genauer:

   $$\frac{1}{r(A)^k} \cdot A^k \ \xrightarrow{k\to\infty} \ G$$

   Die Spaltenvektoren von G sind Eigenvektoren von A zum Eigenwert $r(A)$. [Hinweis: Für $r(A) = 1$ steht da einfach $A^k \ \xrightarrow{k\to\infty} \ G$]

[50] [H], Satz 1.13 auf S. 367
[51] [H], Hauptsatz 1.8 von Perron, Frobenius und Wielandt, S. 356
[52] [H], Satz 1.15 auf S. 369

15 Tims Flächeninhaltsproblem

15.1 Das Problem

Wie du aus der Q1 weißt, ist durch $z = f(x, y)$ eine Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ gegeben. Der Graph der Funktion ist die Menge der Raumpunkte $(x|y|f(x, y))$, wobei $(x|y)$ den Definitionsbereich von f in der xy–Ebene durchläuft. Den Definitonsbereich nehmen wir hier der Einfachheit halber als das Rechteck der Punkte der xy–Ebene an, deren x–Werte zwischen a und b und deren y–Werte zwischen c und d liegen.

Bei einer gutartigen Funktion, und nur solche wollen wir betrachten, ist der Funktionsgraph

$$\{\,(x|y|f(x, y)) \mid a \le x \le b,\ c \le y \le d\,\}$$

dann eine Fläche im Raum, und diese liegt „über" dem Rechteck mit den Eckpunkten $(a|c), (b|c), (b|d), (a|d)$ der xy–Ebene.

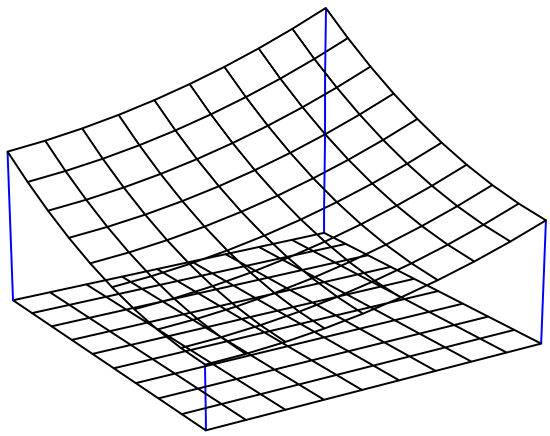


Abbildung 57: Graph einer Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. Der Definitionsbereich ist ein Quadrat in der xy–Ebene, dessen Kanten parallel zu den Achsen sind.

Tim fragte vor vielen Tagen danach, wie man den Inhalt einer solchen Fläche berechnet, und wir wissen nun genug, dass wir auf diese Frage mit vertretbarem Aufwand eine Antwort geben können.

Wie man im Prinzip vorgehen kann, hat Sjard mit dürren Worten umrissen: Man unterteilt das Rechteck in der xy–Ebene in viele kleine Teilrechtecke, die so klein sind, dass man die Flächenstücke über diesen kleinen Rechtecken in guter Näherung als Parallelogramme ansehen kann, berechnet deren Inhalte und addiert diese auf, und man kann hoffen, so einen brauchbaren Näherungswert für den Flächeninhalt zu bekommen. Das ist der Plan. Als erstes brauchen wir dafür eine bequeme Formel für den Inhalt eines Parallelogramms im Raum.

15.2 Der Inhalt eines Parallelogramms im Raum (1)

Ein Parallelogramm $ABCD$ in der Ebene hat bekanntlich den Flächeninhalt

$$F = ad\sin(\alpha) \quad .$$

Ein Parallelogramm im Raum, das von Vektoren $\vec{v}$ und $\vec{w}$ aufgespannt wird, hat dementsprechend den Inhalt

$$F = |\vec{v}| \cdot |\vec{w}| \cdot \sin(\alpha) \quad ;$$

dabei bezeichnet α den Winkel zwischen den Vektoren. Das ist klar, aber diese Formel ist für unsere Zwecke nicht brauchbar. Wir bereiten sie in der folgenden Weise auf:

$$\begin{aligned} F^2 &= |\vec{v}|^2 \cdot |\vec{w}|^2 \cdot \sin^2(\alpha) \\ &= |\vec{v}|^2 \cdot |\vec{w}|^2 \cdot (1 - \cos^2(\alpha)) \\ &= |\vec{v}|^2 \cdot |\vec{w}|^2 - |\vec{v}|^2 \cdot |\vec{w}|^2 \cdot \cos^2(\alpha) \\ &= |\vec{v}|^2 \cdot |\vec{w}|^2 - (\vec{v} * \vec{w})^2 \end{aligned}$$

Daraus erhalten wir eine wunderbare Formel für den Inhalt F des Parallelogramms, das von Vektoren $\vec{v}, \vec{w} \in \mathbb{R}^3$ aufgespannt wird:

$$F = \sqrt{(\vec{v} * \vec{v}) \cdot (\vec{w} * \vec{w}) - (\vec{v} * \vec{w})^2} \tag{49}$$

In der Formel stehen nur die Vektoren, die das Parallelogramm aufspannen!

15.3 Flächeninhalt eines Parallelogramms im Raum (2)

Die schöne Formel für den Inhalt eines Parallelogramms, das von zwei Vektoren $\vec{v}, \vec{w} \in \mathbb{R}^3$ aufgespannt wird, können wir auch mit unseren Methoden bekommen.

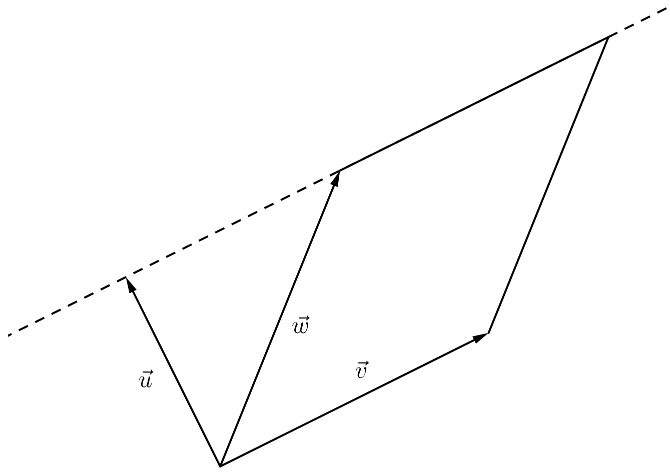


Abbildung 58: Der Inhalt des von $\vec{v}$ und $\vec{w}$ aufgespannten Parallelogramms ist $|\vec{v}|\cdot|\vec{u}|$

Wir bilden einen neuen Vektor $\vec{u}$, der zu $\vec{v}$ orthogonal ist, indem wir zu $\vec{w}$ ein geeignetes Vielfaches von $\vec{v}$ addieren. Die Länge von $\vec{u}$ ist dann die Höhe des Parallelogramms, sein Inhalt folglich $|\vec{u}| \cdot |\vec{v}|$.

Sowas haben wir schon oft gemacht. Damit $\vec{u} = \vec{w} + r\vec{v}$ zu $\vec{v}$ orthogonal ist, muss

$$(\vec{w} + r\vec{v}) * \vec{v} \;=\; 0$$

sein, und daraus folgt nach kurzer Rechnung

$$r \;=\; -\frac{\vec{w} * \vec{v}}{\vec{v} * \vec{v}} \quad .$$

Wir berechnen die Länge von $\vec{u}$.

$$\begin{aligned}
|\vec{u}| &= \sqrt{\vec{u} * \vec{u}} \\
&= \sqrt{\left(\vec{w} - \frac{\vec{w} * \vec{v}}{\vec{v} * \vec{v}}\vec{v}\right) * \left(\vec{w} - \frac{\vec{w} * \vec{v}}{\vec{v} * \vec{v}}\vec{v}\right)} \\
&= \sqrt{\vec{w} * \vec{w} - 2\frac{\vec{w} * \vec{v}}{\vec{v} * \vec{v}}(\vec{w} * \vec{v}) + \left(\frac{\vec{w} * \vec{v}}{\vec{v} * \vec{v}}\right)^2 \vec{v} * \vec{v}} \\
&= \sqrt{\vec{w} * \vec{w} - \frac{(\vec{w} * \vec{v})^2}{\vec{v} * \vec{v}}}
\end{aligned}$$

Um den Inhalt F des Parallelogramms zu erhalten, multiplizieren wir mit $|\vec{v}| = \sqrt{\vec{v} * \vec{v}}$. Die Wurzeln zusammenfassen und mit $\vec{v} * \vec{v}$ kürzen, dann steht da wieder unsere Formel

$$F \;=\; \sqrt{(\vec{v} * \vec{v})(\vec{w} * \vec{w}) - (\vec{v} * \vec{w})^2} \quad .$$

15.4 Zum Inhalt eines kleinen Teilstücks der Fläche

Wir betrachten nun ein kleines Rechteck der xy–Ebene, das im Definitionsbereich liegt. Seine Eckpunkte seien

$$(x|y), (x + \Delta x|y), (x + \Delta x|y + \Delta y), (x|y + \Delta y)$$

mit kleinen positiven Zahlen Δx und Δy. Wir fragen nach dem Inhalt des räumlichen Parallelogramms mit den Eckpunkten

$$(x|y|f(x, y)),\ (x + \Delta x|y|f(x + \Delta x, y)) \quad \text{und} \quad (x|y + \Delta y|f(x, y + \Delta y)) \quad ,$$

es wird von den Vektoren

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} \Delta x \\ 0 \\ f(x + \Delta x, y) - f(x, y) \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \vec{w} = \begin{pmatrix} 0 \\ \Delta y \\ f(x, y + \Delta y) - f(x, y) \end{pmatrix} \tag{50}$$

aufgespannt.[53] Nun ist bei festem y durch

$$g:\ t \mapsto f(t, y)$$

eine gewöhnliche Funktion $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gegeben. Du siehst ihren Graphen, wenn du die Schnittkurve des Graphen von f mit der Ebene durch $P(x|y|f(x, y))$ betrachtest, die parallel zur xz–Ebene verläuft.[54] Mit Hilfe von g könen wir die z–Komponente von $\vec{v}$ berechnen. Wir erhalten dafür

$$f(x + \Delta x, y) - f(x, y) \ = \ g(x + \Delta x) - g(x) \ \approx \ g'(x)\Delta x \quad .$$

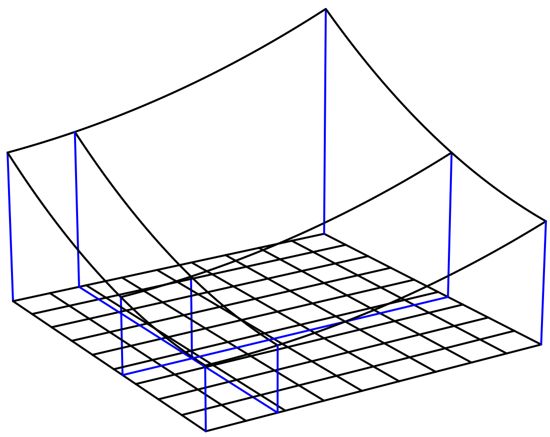


Abbildung 59: Schnittkurven der Fläche mit Ebenen parallel zur xz– bzw. der yz–Ebene

Man bekommt hier $g'(x)$, indem man den Term $f(x, y)$ nach x ableitet und dabei y als Konstante ansieht – du kennst so etwas von Kurvenscharen her. Solche

[53] Der Flächenpunkt über $(x + \Delta x|y + \Delta y)$ liegt gewöhnlich **nicht** in der Ebene des Parallelogramms, den verwenden wir nicht.

[54] Als wir das Volumen des Körpers berechnet haben, der nach oben durch den Graphen von f begrenzt wurde, oder das Volumen eines Kartoffelkörpers, haben wir schon oft die Schnittflächen des Körpers mit solchen Ebenen betrachtet. Hier geht es jetzt nicht um die Schnittfläche, sondern nur um die Schnittkurve der Ebene mit dem Graphen von f.

Ableitungen einer Funktion zweier Veränderlicher nach einer der Variablen, bei der man die andere als konstant ansieht, nennt man **partielle Ableitungen**, man hat dafür die hübschen Symbole

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) \quad \text{und} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) \quad . \tag{51}$$

Wenn beispielsweise

$$f(x,y) \;=\; x^2 + \frac{1}{2}xy + \frac{3}{2}y^2 + 1$$

ist, ist

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) \;=\; 2x + \frac{1}{2}y \quad \text{und} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) \;=\; \frac{1}{2}x + 3y \quad .$$

Du musst dich sicher etwas an den Formalismus gewöhnen, aber schwer ist das eigentlich nicht.

15.5 Formel für den Inhalt eines Näherungsparallelogramms

Mit dem neuen Werkzeug erhalten wir für die Vektoren $\vec{v}$ und $\vec{w}$ aus Gleichung (50), die das betrachtete Parallelogramm aufspannen,

$$\vec{v} \;=\; \begin{pmatrix} \Delta x \\ 0 \\ \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\Delta x \end{pmatrix} \;=\; \Delta x \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) \end{pmatrix}$$

und entsprechend

$$\vec{w} \;=\; \Delta y \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) \end{pmatrix} \quad .$$

Wir berechnen damit

$$\begin{aligned} \vec{v} * \vec{v} \;&=\; (\Delta x)^2 \left(1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\right)^2\right) \quad , \\ \vec{w} * \vec{w} \;&=\; (\Delta y)^2 \left(1 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\right)^2\right) \quad \text{sowie} \\ (\vec{v} * \vec{w})^2 \;&=\; (\Delta x)^2 (\Delta y)^2 \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\right)^2 \cdot \left(\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\right)^2 \quad , \end{aligned}$$

und das ergibt nach etwas Rechnung für das Quadrat F^2 des Flächeninhalts F den Term

$$\begin{aligned} F^2 \;&=\; (\vec{v} * \vec{v})(\vec{w} * \vec{w}) - (\vec{v} * \vec{w})^2 \\ &=\; (\Delta x)^2 (\Delta y)^2 \left(1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\right)^2\right) \end{aligned}$$

Für den Inhalt des kleinen Parallelogramms erhalten wir nun den eindrucksvollen Term

$$F \;=\; (\Delta x)(\Delta y)\sqrt{1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\right)^2} \quad . \tag{52}$$

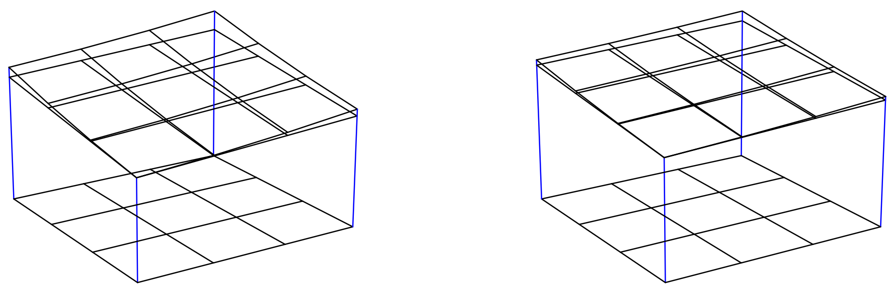


Abbildung 60: Flächenstücke über zwei Quadraten der xy–Ebene. Die linke untere Ecke stimmt bei beiden überein, die Kantenlänge des Quadrats im rechten Bild beträgt $\frac{2}{3}$ der des Quadrats im linken Bild. Dargestellt sind jeweils das Flächenstück über dem Quadrat und das Parallelogramm, mit dem oben gerechnet wurde. Man sieht deutlich, wie die Abweichung des Parallelogramms vom Flächenstücks bei der Verkleinerung der Kantenlänge abnimmt – die Näherung wird besser.

15.6 Eine Formel für den Inhalt der Fläche

Wir teilen die Intervalle $[a, b]$ und $c, d]$ jeweils in Teile gleicher Größe $\Delta x = \frac{1}{n}(b-a)$ bzw. $\Delta y = \frac{1}{m}(d-c)$ ein. So entstehen nm kleine Rechtecke. Das j–te Rechteck von links in der i–ten Zeile von unten hat links unten die Ecke $(x_j|y_i)$ mit

$$x_j = a+(j-1)\Delta x \quad \text{und} \quad y_i = c+(i-1)\Delta y \quad \text{für } j = 1, 2, \ldots n \text{ und } i = 1, 2, \ldots, m \ ,$$

und der Inhalt des zugehörigen Parallelogramms ist nach Gleichung (52)

$$F_{ji} \ = \ (\Delta x)(\Delta y)\sqrt{1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x_j, y_i)\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}(x_j, y_i)\right)^2} \ .$$

Summieren wir alle Inhalte auf, ergibt das

$$(\Delta x)(\Delta y)\sum_{i=0}^{m-1}\sum_{j=0}^{n-1}\sqrt{1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x_j, y_i)\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}(x_j, y_i)\right)^2} \ ,$$

und wenn wir n und m gegen Unendlich laufen lassen, wird daraus das Integral

$$\int_a^b \int_c^d \sqrt{1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x, y)\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}(x, y)\right)^2}\, dy\, dx \ , \tag{53}$$

und das sollte den Wert des Flächeninhalts liefern. Das Integral im konkreten Fall auszurechnen, ist freilich noch ein Problem für sich.

15.7 Ein konkretes Beispiel

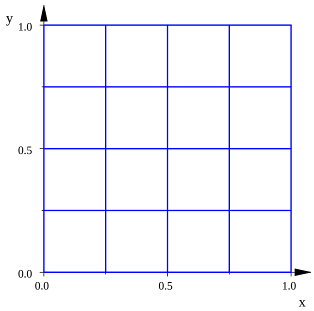
Wir betrachten die Funktion f mit

$$f(x,y) \;=\; x^2 + \frac{1}{2}xy + \frac{3}{2}y^2 + 1$$

und fragen nach dem Inhalt des Stücks des Graphen der Funktion, das über dem Einheitsquadrat der xy–Ebene liegt. Die Abbildungen in diesem Kapitel wurden übrigens alle mit dieser Beispielfunktion und diesem Definitionsbereich erstellt, und die partiellen Ableitungen wurden auch schon berechnet:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2x + \frac{1}{2}y \quad \text{und} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{1}{2}x + 3y \quad .$$

Wir teilen den Definitionsbereich sowohl in x– als auch in y–Richtung in $n = 4$ Teile gleicher Größe ein, das ergibt dieses Bild:



In unserer Herleitung haben wir in jedem Teilrechteck des Definitionsbereichs den Eckpunkt $(x_i|y_j)$ links unten gewählt und den Inhalt des Parallelogramms im Raum berechnet, das von den Vektoren

$$\vec{v} = (\Delta x)\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{\partial f}{\partial x}(x_i,y_j) \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \vec{w} = (\Delta y)\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x_i,y_j) \end{pmatrix}$$

aufgespannt wird. Sein Inhalt ist nach Gleichung (52) auf Seite 133

$$\frac{1}{16}\sqrt{1 + \left(2x_i + \frac{1}{2}y_j\right)^2 + \left(\frac{1}{2}x_i + 3y_j\right)^2} \quad .$$

Wir lassen uns von MuPAD die Inhalte aller 16 Parallelogramme aufsummieren[55] und erhalten als Näherungswert für den gesuchten Flächeninhalt

$$2.047294097 \quad .$$

Der exakte Wert ist das Integral in Gleichung (53) auf Seite 134. Ich kündigte schon an, dass das nicht so leicht auszurechnen ist, nicht einmal für unser harmloses f. Tatsächlich kapituliert auch MuPAD, wenn man nach dem exakten Wert fragt, aber mit numerischen Methoden ermittelt das Programm als Flächeninhalt

$$2.468831573 \quad .$$

[55] Siehe timR.mn

Wenn uns unser Näherungswert nicht gut genug ist, können wir die Einteilung deutlich feiner machen – oder die Punkte $(x_i|y_j)$ geschickter wählen. **Jeder** Punkt des Definitionsbereichs liefert ja ein Paar $\vec{v}, \vec{w}$ von Vektoren, und es ist nicht sehr schlau, einen Eckpunkt eines kleinen Quadrates als typischen Stellvertreter für alle Punkte des Quadrates zu wählen. Besser nimmt man den Punkt im Zentrum! Für diese Wahl der Stützpunkte liefert MuPAD den passablen Näherungswert

$$2.468831573 \quad ,$$

das ist doch ein schöner Wert für nur sechzehn Teilquadrate.

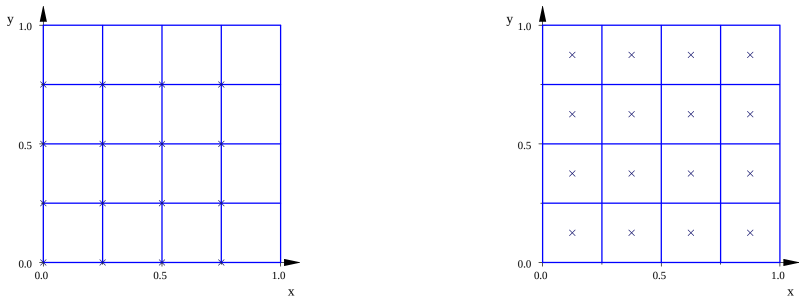


Abbildung 61: Gewählte Stützpunkte in den kleinen Quadraten: Ecke links unten im linken Bild, im Zentrum im rechten Bild

An dem Beispiel siehst du etwas sehr Typisches: Für die Theorie ist ziemlich egal, welche Punkte man als Stützpunkte nimmt – die Summe konvergiert bei jeder Wahl der Stützpunkte gegen das Integral. Die Güte der Näherungswerte jedoch hängt sehr wohl von einer klugen Wahl der Stützpunkte ab. So etwas hast du auch schon gesehen, als wir Näherungswerte für Integrale mit Hilfe Riemannscher Summen ausgerechnet haben; da kann man die Stützstellen geschickt oder weniger geschickt wählen.

Wenn du magst, kannst du ein Beispiel rechnen: Nimm als Fläche die Ebene mit der Gleichung $-x - 2y - 3z = 0$ und berechne den Inhalt des Flächenstücks über dem Einheitsquadrat elementar und mit dem neuen Werkzeug. Es sollte ja das Gleiche herauskommen. – Ansonsten sind wir am Ende mit der Behandlung von Tims Problem. Du sollst noch eine weitere Perle sehen, die man nicht vor die Säue wirft.

16 Komplexe Zahlen

16.1 Einführung

Es macht dir keinerlei Schwierigkeiten, die Gleichungen

$$x + 7 \;=\; 0 \quad \text{bzw.} \quad x^2 - 2 \;=\; 0$$

zu lösen. Das war nicht immer so in der Geschichte der Mathematik: Man hat lange gebraucht, bis man negative Zahlen als Zahlen akzeptierte, und was die zweite Gleichung angeht, hat schon Euklid bewiesen, dass es keine Zahl gibt, deren Quadrat 2 ist: Zahlen waren für Euklid Verhältnisse natürlicher Zahlen, also Brüche, und $\sqrt{2}$ lässt sich nicht als Bruch schreiben.

Du bist mit negativen Zahlen und mit Wurzeln wohlvertraut, und du kennst sogar Zahlen wie e und π, die sind noch viel kritischer als Wurzeln. Dein Zahlenvorrat $\mathbb{R}$ ist für dich insofern unproblematisch, als du ja die Zahlengerade vor Augen hast: zu jedem Punkt der Zahlengeraden gehört für dich genau eine Zahl. Auch zu $-3, \sqrt{2}$ und zu π kannst du Punkte auf der Zahlengeraden angeben: Auf einer Geraden markierst du zwei Punkte und schreibst 0 und 1 daran. Wenn du die Strecke immer wieder abträgst, bekommst du Punkte zu den ganzen Zahlen. Für $\sqrt{2}$ errichtest du ein Quadrat auf der Strecke von 0 bis 1 und trägst mit dem Zirkel die Diagonale ab, und π bekommst du, wenn du einen Kreis mit dem Radius 1, der die Gerade bei 0 berührt, auf der Geraden halb abrollst.

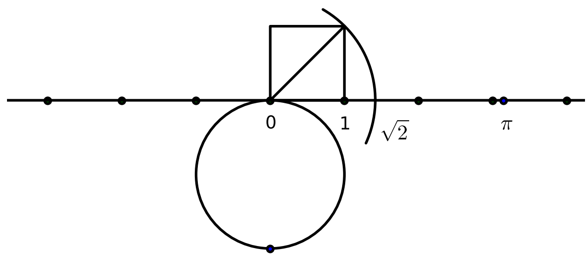
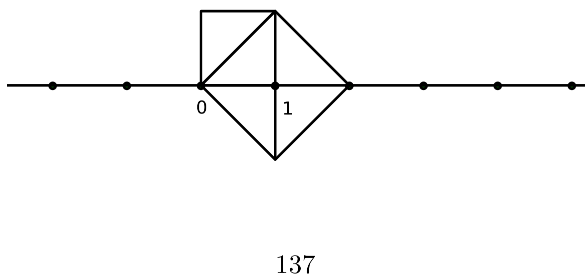


Abbildung 62: Die Zahlengerade mit einigen Punkten

So weit, so gut. Dann nehmen wir uns eine neue Gleichung vor:

$$x^2 + 1 \;=\; 0 \tag{54}$$

Aus dem Unterricht kennst du die folgende Argumention: x^2 ist stets ≥ 0, also ist $x^2 + 1 \geq 1$, die Gleichung (54) hat keine Lösung. Das stimmt auch so, für alle Zahlen der Zahlengeraden ist die Argumentation in Ordnung. Euklid hatte auch bewiesen, dass das Quadrat keiner seiner Zahlen 2 sein kann, aber wir kennen eine Lösung der Gleichung $x^2 = 2$. Was machen wir anders? Wir finden einen Punkt der Zahlengeraden, dessen Abstand von 0 so groß ist wie die Diagonale des Einheitsquadrates, und ein Quadrat, das diese Diagonale als Kante hat, hat den Inhalt 2, wie diese Abbildung zeigt:



An den so gefundenen Punkt der Zahlengeraden schreiben wir das Symbol $\sqrt{2}$; damit wurde quasi eine neue Zahl eingeführt, die das Quadrat 2 hat und die somit eine Lösung der Gleichung ist. Wie, wenn wir das bei der neuen Gleichung ganz genauso machen? Wir nehmen ein Symbol, meinetwegen i, und sagen, das sei nun eine neue Zahl, und deren Quadrat sei -1 und die Zahl sei somit eine Lösung der Gleichung (54). So ganz wohl wäre dir sicher nicht dabei, und das mag auch daher kommen, dass diese neue Zahl keinesfalls zu einem Punkt der Zahlengeraden gehören kann, denn an deren Punkten stehen reelle Zahlen, und deren Quadrate sind niemals negativ.

Wohl war den Leuten früher auch nicht, aber sie gingen mit diesen „imaginären" (d. h. unwirklichen) Größen um, weil sie damit zu Lösungen realer Probleme kamen. Man hatte damals eine Lösungsformel für Gleichungen dritten Grades, und wenn man die anwandte, bekam man es oft mit quadratischen Gleichungen zu tun, die keine Lösung hatten, wie etwa

$$x^2 + 2x + 10 = 0 \quad .$$

Nach der pq–Formel ist

$$x \;=\; -1 \pm \sqrt{1-10} \;=\; -1 \pm \sqrt{-9} \quad ,$$

und das ist erst einmal ein sinnloser Ausdruck. Machte man aber daraus mit dem geheimnisvollen i

$$-1 \pm \sqrt{-9} \;=\; -1 \pm 3i$$

und rechnete damit weiter, konnte man zu ordentlichen reellen Lösungen der Gleichung dritten Grades kommen, und diesen Gewinn wollte man nicht preisgeben.

Wie ging man mit dem i praktisch um? Wenn es eine Zahl sein sollte, musste man i mit gewöhnlichen reellen Zahlen multiplizieren können, das gibt Terme der Form bi, und reelle Zahlen dazu addieren können, dann ist man bei Konstrukten der Form $a + bi$. Addiert oder multipliziert man zwei Terme dieser Art nach den üblichen Rechengesetzen für reelle Zahlen, gibt dies wieder einen solchen; also ist die Menge

$$\mathbb{C} \;:=\; \{\, a + bi \,|\, a, b \in \mathbb{R} \,\} \tag{55}$$

in gewisser Weise eine abgeschlossene Zahlenmenge, so wie das Erzeugnis von Vektoren abgeschlossen ist bei Summen– und Vielfachenbildung. – In dieser Menge $\mathbb{C}$ sollst du nun erst einmal ein wenig rechnen.

Aufgaben

1. Berechne für $\alpha = 3 + 4i$ und $\beta = 2 - 8i$ die Terme $\alpha + \beta$, $\alpha - \beta$ und $\alpha\beta$.
2. Berechne allgemein $(a + bi)(c + di)$.
3. Löse die Gleichung $x^2 + 6x + 13 = 0$ und mache die Probe.
4. Berechne $(a + bi)(a - bi)$ für $a + bi \in \mathbb{C}$.
5. Die Zahlen $0 = 0 + 0i$ und $1 = 1 + 0i$ sind auch in $\mathbb{C}$ die Null und die Eins. Klar?
6. Falls a und b nicht beide Null sind, ist

   $$(a + bi) \cdot \left(\frac{a}{a^2 + b^2} - \frac{b}{a^2 + b^2} \cdot i \right) \;=\; 1 \quad .$$

   Somit hat jedes von 0 verschiedene $\alpha \in \mathbb{C}$ einen Kehrwert.

7. Aus $a + bi = c + di$ folgt $a - c = (d - b)i$. Wäre $b \neq d$, könnte man durch $b - d$ dividieren, und dann wäre i eine reelle Zahl, was nicht geht. Also kann $a + bi = c + di$ nur dann gelten, wenn $a = c$ und $b = d$ ist. Auch klar?

16.2 Die Zahlenebene

Die neuen Objekte aus der Menge $\mathbb{C}$ verloren ihren Nimbus des Unwirklichen zu einem erheblichen Teil, als man lernte, sie geometrisch zu veranschaulichen. Was man sehen kann, ist nicht mehr unwirklich! Aus heutiger Sicht ist die Veranschaulichung so einfach und naheliegend, dass man sich wundert, dass sich Leute früher so schwer damit taten. Das Objekt $a + bi$ ist durch die Zahlen a und b bestimmt. Man darf sie nicht vertauschen, $a+bi$ ist im Allgemeinen nicht dassselbe wir $b+ia$. Nun, zwei reelle Zahlen a und b, bei denen es auf die Reihenfolge ankommt, bilden ein Zahlenpaar (a, b), und das kann man in natürlicher Weise als Koordinatenpaar eines Punktes ansehen – das wäre dann $(a|b)$ – oder als Vektor $\left(\begin{smallmatrix} a \\ b \end{smallmatrix}\right) \in \mathbb{R}^2$:

$$(a, b) \;\longleftrightarrow\; (a|b) \;\longleftrightarrow\; \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

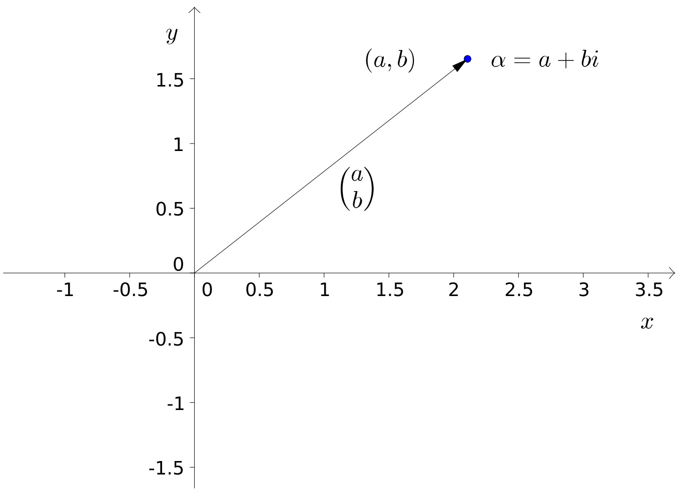


Abbildung 63: Darstellung von $\mathbb{C}$ in der Ebene

Die Addition in $\mathbb{C}$ geschieht komponentenweise, ist also nichts anderes als die gewöhnliche Vektoraddition im $\mathbb{R}^2$, und das ist nur die erste Einsicht, die wir durch die Einführung der Zahlenebene gewinnen.

Schauen wir uns nun an, was es mit der Multplikation in $\mathbb{C}$ auf sich hat. Dazu halten wir eine Zahl $\alpha = a+bi$ fest und betrachten die Abbildung $\beta \mapsto \alpha\beta$, die jeder komplexen Zahl[56] $\beta = x + yi$ ihr Produkt mit α zuordnet. Das Bild von $\beta = x + yi$ ist

$$\alpha\beta \;=\; (a + bi)(x + yi) \;=\; ax - by + (ay + bx)i \quad .$$

Wir schreiben das um in eine Abbildung von Spaltenvektoren:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \xrightarrow{\beta\mapsto\alpha\beta} \begin{pmatrix} ax - by \\ bx + ay \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

[56] Ich habe es bisher nicht offenausgesprochen, aber, in der Tat, die Elemente von $\mathbb{C}$ sind die komplexen Zahlen.

Die Abbildung $\beta \mapsto \alpha\beta$ ist eine einfache Matrixabbildung! Und Matrizen dieser Bauart kennen wir auch: so ähnlich sehen Drehmatrizen aus. Eine Drehung um den Nullpunkt um den Winkel φ gegen den Uhrzeigersinn hat die Matrix

$$\begin{pmatrix} \cos(\varphi) & -\sin(\varphi) \\ \sin(\varphi) & \cos(\varphi) \end{pmatrix} \quad ,$$

der Vektor $\vec{e}_1$ geht auf den Ortsvektor des Punktes $(\cos(\varphi)|\sin(\varphi))$ des Einheitskreises.

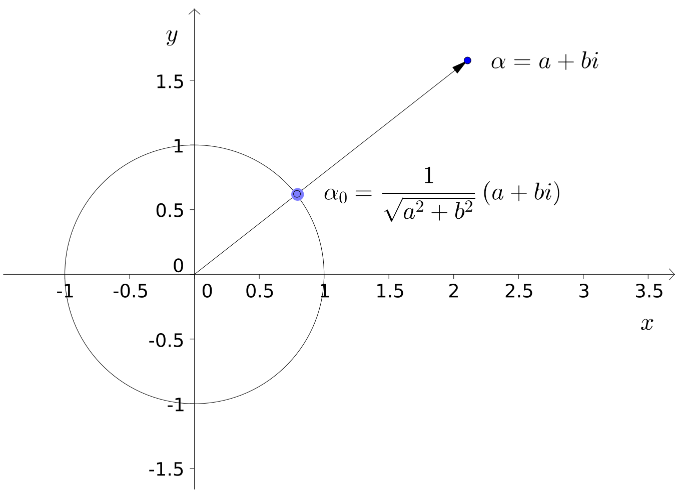


Abbildung 64: Zur Wirkung von $\beta \mapsto \alpha\beta$

Die Abbildung $\beta \mapsto \alpha\beta$ bildet $1 = 1 + 0i$ auf α ab, und das können wir bequem nachbauen. Wir drehen erst so, dass der Punkt $(1|0)$ auf den Schnittpunkt des Strahls von $(0|0)$ durch $(a|b)$ mit dem Einheitskreis kommt – der Drehwinkel ist also der Winkel, um den man die positive x–Achse gegen den Uhrzeigersinn drehen muss, damit sie durch den Punkt $(a|b)$ zu α geht – und strecken dann so, dass dieser Punkt auf $(a|b)$ kommt. Der Streckfaktor ist der Betrag des Vektors $\binom{a}{b}$, also $\sqrt{a^2+b^2}$. Die Matrizen zu diesen Abbildungen sind

$$\begin{pmatrix} \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} & -\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} \\ \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} & \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \begin{pmatrix} \sqrt{a^2+b^2} & 0 \\ 0 & \sqrt{a^2+b^2} \end{pmatrix} \quad ,$$

und in der Tat ist

$$\begin{pmatrix} \sqrt{a^2+b^2} & 0 \\ 0 & \sqrt{a^2+b^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} & -\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} \\ \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} & \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \quad !$$

Die Abbildung $\beta \mapsto \alpha\beta$ ist eine **Drehstreckung** der Ebene um den Nullpunkt.

Aufgaben

1. Zur komplexen Zahl $\alpha = a+bi$ gehört die konjugiert komplexe Zahl $\bar{\alpha} := a-bi$. In welcher Beziehung stehen α und $\bar{\alpha}$ geometrisch zu einander?
2. Man setzt $|\alpha| := \sqrt{\alpha\bar{\alpha}}$. In welchem Zusammenhang steht das zu den Dingen, die du kennst?
3. Berechne $(x-\alpha)(x-\bar{\alpha})$.

16.3 Die komplexe Exponentialfunktion

Bei den meisten unserer Funktionen könnten wir bei dem Term $f(x)$ für x auch eine komplexe Zahl z einsetzen, dann ist $f(z)$ wieder eine komplexe Zahl. Freilich haben wir es nun mit einer neuen Funktion zu tun! Das siehst du spätestens dann, wenn du nach dem Graphen fragst. Das Argument z durchläuft ja eine ganze Ebene, und das $f(z)$ kann wieder eine ganze Ebene durchlaufen. Man braucht also zwei Zahlenebenen, eine für das z, eine für das $f(z)$. Man studiert solche Funktionen und ihre Eigenschaften in einer reichen und reizvollen mathematischen Theorie, der Funktionentheorie. Leider können wir uns damit nicht befassen, weil ihr andere Pläne für die nähere Zukunft habt, aber einen kleinen Splitter will ich euch doch zeigen. Und zwar will ich mir mit euch anschauen, was wohl

$$e^z$$

sein mag für eine komplexe Zahl z.

Wir beschränken uns auf den Fall $z = it$ für $t \in \mathbb{R}$, die komplexe Zahl z liegt dann auf der y–Achse unserer Zahlenebene, der sogenannten imaginären Achse. Was also mag

$$e^{it}\ , \quad t \in \mathbb{R}$$

bedeuten? Mit dem gewöhnlichen Potenzbegriff – abgekürzte Schreibweise für ein Produkt gleicher Faktoren – kommt man nicht weiter. Aber wir haben ja unsere Reihenentwicklung der e–Funktion:

$$e^x \ = \ \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} x^k$$

Wenn wir da das x durch it ersetzen, steht auf der rechten Seite eine Summe klar definierter Terme

$$\frac{1}{k!}(it)^k \ = \ \frac{1}{k!} i^k t^k \quad .$$

Was ist i^k? Bilden wir diesen Ausdruck für $k = 0, 1, 2, 3, 4, \ldots$, ergibt das Folgendes:

$$\begin{aligned}
i^0 &= 1 \\
i^1 &= i \\
i^2 &= -1 \\
i^3 &= i^2 i = -i \\
i^4 &= (i^2)^2 = (-1)^2 = 1 \\
i^5 &= i^4 i = 1 \cdot i = i \\
i^6 &= i^4 i^2 = 1 \cdot i^2 = -1 \\
&\ldots
\end{aligned}$$

Das Muster ist klar, bei $k = 4$ geht es wieder von vorn los, dementsprechend auch wieder bei $k = 8,\ k = 12$, und so weiter. Man kann das formal sauber aufschreiben: Jede natürliche Zahl k kann man in der Form

$$k = 4j + r \quad \text{mit } j \in \mathbb{Z} \text{ und } r \in \{0, 1, 2, 3\}$$

schreiben, das ist Division durch vier mit Rest. Und dann ist

$$i^k = i^{4j+r} = i^{4j} i^r = (i^4)^j i^r = 1^j i^r = i^r \quad .$$

Du magst dich beschweren, dass hier zu kleinlich gerechnet wurde. Will man wirklich sorgfältig arbeiten, muss man noch viel kleinlicher vorgehen. Wir wenden einfach unsere bekannten Rechenregeln an, ohne groß nach der Berechtigung dafür zu fragen, und es wäre auch außerordentlich zeitraubend und frustrierend, hier ganz sauber zu arbeiten. Das haben Generationen von Mathematikern für uns erledigt, ich kenne die Früchte ihrer Arbeit und weiß, was geht und was nicht, und ich nehme euch an die Hand und führe euch durch den Garten und zeige euch nur die schönen Sachen ...

Hier geht es nun so weiter:

$$e^{it} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}(it)^k = 1 + it - \frac{1}{2}t^2 - \frac{1}{3!}it + \frac{1}{4!}t^4 - \frac{1}{5!}it^5 + \ \ldots$$

Ihr hattet die Idee, die i–freien Terme und die i–haltigen Terme jeweils für sich aufzusummieren. Das gibt dann:

$$\begin{aligned} e^{it} &= \left(1 - \frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{4!}t^4 - \frac{1}{6!}t^6 + \ \ldots\right) &&+ \quad i \cdot \left(t - \frac{1}{3!}t^3 + \frac{1}{5!}t^5 - \ \ldots\right) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \frac{1}{(2k)!}t^{2k} &&+ \quad i \cdot \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \frac{1}{(2k+1)!}t^{2k+1} \\ &= \cos(t) &&+ \quad i \cdot \sin(t) \end{aligned}$$

Wer hätte das gedacht! Es gilt

$$e^{it} \ = \ \cos(t) + i\sin(t) \quad \text{für } t \in \mathbb{R} \ ! \tag{56}$$

Mit diesem neuen Ergebnis schauen wir noch einmal auf die Abbildung 64 auf Seite 140. Da ist eine Zahl $\alpha = a + bi \in \mathbb{C}$, dazu gehört eine Zahl α_0 auf dem Einheitskreis. Setzen wir $r := \sqrt{a^2 + b^2}$ und bezeichen wir den Winkel, den der Strahl vom Nullpunkt durch α mit der positiven x–Achse bildet, mit φ, gilt

$$\alpha \ = \ r(\cos(\varphi) + i\sin(\varphi)) \ = \ re^{i\varphi} \quad ,$$

freilich muss man φ dazu im Bogenmaß messen. Man kann also **jede** komplexe Zahl in der Form

$$re^{it}$$

schreiben, dabei ist r der Abstand der Zahl vom Nullpunkt, also der Betrag der Zahl. Das t steht für den Winkel, von dem eben die Rede war; freilich ist er nicht eindeutig bestimmt, weil

$$e^{i(t+k2\pi)} \ = \ e^{it}$$

ist für ganze Zahlen k. Dies wirft eine neues Licht auf unser Verständnis der Multiplikation komplexer Zahlen:

$$\alpha_1\alpha_2 \ = \ r_1e^{it_1} \cdot r_2e^{it_2} \ = \ r_1r_2e^{i(t_1+t_2)}$$

Die Beträge der Faktoren werden multipliziert, die Winkel addiert. Das hätte man auch schon mit Hilfe unserer Matrizen sehen können, aber hier kommt es noch einmal heraus.

Aufgabe. Berechne die fehlende Zahl in $e^{i\pi} + 1 = \square$. Du hast dann eine Gleichung vor dir, die fünf zentrale Größen der Mathematik enthält!

16.4 Eine Anwendung zum Abschluss

Ein Gewicht hängt an einer Schraubenfeder von der Decke. Lenkt man es aus, bewegt es sich auf einer vertikalen Geraden auf und ab. Wir versehen die Gerade mit einer Skala; an der Stelle, an der sich das Gewicht befindet, wenn es in Ruhe ist, steht natürlich der Wert 0. Die Größe der Längeneinheit spielt keine Rolle, überhaupt wollen wir uns nicht unnötig mit physikalischen Einzelheiten belasten. Wir lenken das Gewicht aus und lassen es los, dann bewegt sich ein Punkt P auf der Geraden, und er befinde sich zur Zeit t in der Höhe $y(t)$.

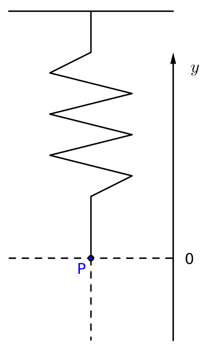


Abbildung 65: Ein Gewicht an einer Schraubenfeder

Die Ableitung

$$y'(t) \;=\; \frac{dy}{dt}(t)$$

von $y(t)$ nach der Zeit ist die Geschwindigkeit des Punktes zur Zeit t. Diese Geschwindigkeit ändert sich mit der Zeit ständig, weil Kräfte auf den Punkt wirken. Die momentane Änderungsrate

$$y''(t) \;=\; \frac{dy'}{dt}(t) \;=\; \frac{d^2y}{dt}$$

ist – bis auf lästige Konstante – die Resultierende dieser Kräfte. Zum einen wirkt die Federkraft auf das Gewicht, zum anderen eine Reibungskraft, meinetwegen der Luftwiderstand, denn nach einiger Zeit kommt der Punkt zur Ruhe. Die Federkraft ist nach oben gerichtet, wenn sich das Gewicht unterhalb der Nullmarke befindet, und sie ist um so größer, je größer der Betrag der Auslenkung ist. Der Luftwiderstand ist immer der Geschwindigkeit entgegen gerichtet und um so größer, je schneller sich das Gewicht bewegt.

Die Mechanik lehrt, dass die Funktion $y = y(t)$ zu jedem Zeitpunkt t die Gleichung

$$y''(t) \;=\; -y'(t) - y(t)$$

erfüllen muss, die in der Physik auftretenden Konstanten habe ich dabei weggeschafft. Üblicherweise lässt man das Argument t weg, dann hat man

$$y'' \;=\; -y' - y \quad \text{bzw.} \quad y'' + y' + y \;=\; 0 \tag{57}$$

vor sich. Eine solche Gleichung heißt **Differentialgleichung**, und man sucht eine Funktion $y(t)$, die diese Gleichung löst. Ist dir klar, was das heißt? Setzt man $y(t)$ ein, muss die Gleichung aufgehen. Probiert man das mit $y(t) = t^2$, erhält man

$$2 \;=\; -2t - t^2 \quad ,$$

und das ist sicher nicht für alle t richtig, somit ist $y(t) = t^2$ keine Lösung der Differentialgleichung. Natürlich ginge $y(t) = 0$ für alle t, dann ist und bleibt das Gewicht halt in Ruhe.

Eine gängige Methode, eine Differentialgleichung zu lösen, geht so: Man nimmt einen interessanten Kandidaten – einen solchen zu finden, ist Sache des Gespürs des Bearbeiters – der einen Parameter enthält, und versucht den Parameter so einzustellen, dass die Sache aufgeht. Unser Kandidat ist

$$y(t) \; = \; e^{\lambda t} \quad ,$$

das λ ist der Stellparameter. Setzen wir den Kandidaten ein, erhalten wir

$$\lambda^2 e^{\lambda t} \; = \; -\lambda e^{\lambda t} - e^{\lambda t} \quad .$$

Da $e^{\lambda t}$ nie Null wird, können wir es wegdividieren, das liefert eine quadratische Gleichung für λ:

$$\lambda^2 + \lambda + 1 \; = \; 0$$

Leider steht in der Wurzel der pq–Formel etwas Negatives, aber das schreckt uns nun nicht mehr. Wir rechnen kess damit weiter und erhalten

$$\lambda \; = \; -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} - 1} \; = \; -\frac{1}{2} \pm \sqrt{-\frac{3}{4}} \; = \; -\frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{3} \cdot i \quad .$$

Ja nun, da steht etwas, aber führt das zu Lösungen der Gleichung? Die sähen so aus:

$$\begin{aligned} y(t) \; = \; e^{\left(-\frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{3} \cdot i\right)t} \; &= \; e^{-\frac{1}{2}t} \cdot e^{\pm \frac{1}{2}\sqrt{3} \cdot it} \\ &= \; e^{-\frac{1}{2}t} \left(\cos\left(\pm\frac{1}{2}\sqrt{3} \cdot t \right) + i \sin\left(\pm\frac{1}{2}\sqrt{3} \cdot t \right) \right) \end{aligned}$$

Es sind zwei Lösungen. Wir schreiben sie hin[57]

$$y_1(t) \; = \; e^{-\frac{1}{2}t} \left(\cos\left(\frac{1}{2}\sqrt{3} \cdot t \right) + i \sin\left(\frac{1}{2}\sqrt{3} \cdot t \right) \right) \tag{58}$$

$$y_2(t) \; = \; e^{-\frac{1}{2}t} \left(\cos\left(\frac{1}{2}\sqrt{3} \cdot t \right) - i \sin\left(\frac{1}{2}\sqrt{3} \cdot t \right) \right) \tag{59}$$

Ich will jetzt nicht zu weit ausholen – es sind nämlich alle Linearkombinationen von $y_1(t)$ und $y_2(t)$ Lösungen, sogar alle $\mathbb{C}$–Linearkombinationen. Hier bilden wir jetzt nur $y(t) = y_1(t) + y_2(t)$ und erhalten die spezielle Lösung

$$y(t) \; = \; 2e^{-\frac{1}{2}t} \left(\cos\left(\frac{1}{2}\sqrt{3} \cdot t \right) \right) \tag{60}$$

der Differentialgleichung (57). Den Graphen dazu siehst du auf der nächsten Seite, er zeigt die zeitliche Entwicklung der Bewegung. Lasse dich nicht irritieren, die Bewegung ist stark gedämpft. Das passiert, wenn sich das Gewicht in einer recht zähen Flüssigkeit bewegt.

Das war es dann. Alles Gute euch, Jungs.

[57] Beachte, dass stets $\cos(\alpha) = \cos(-\alpha)$ ist.

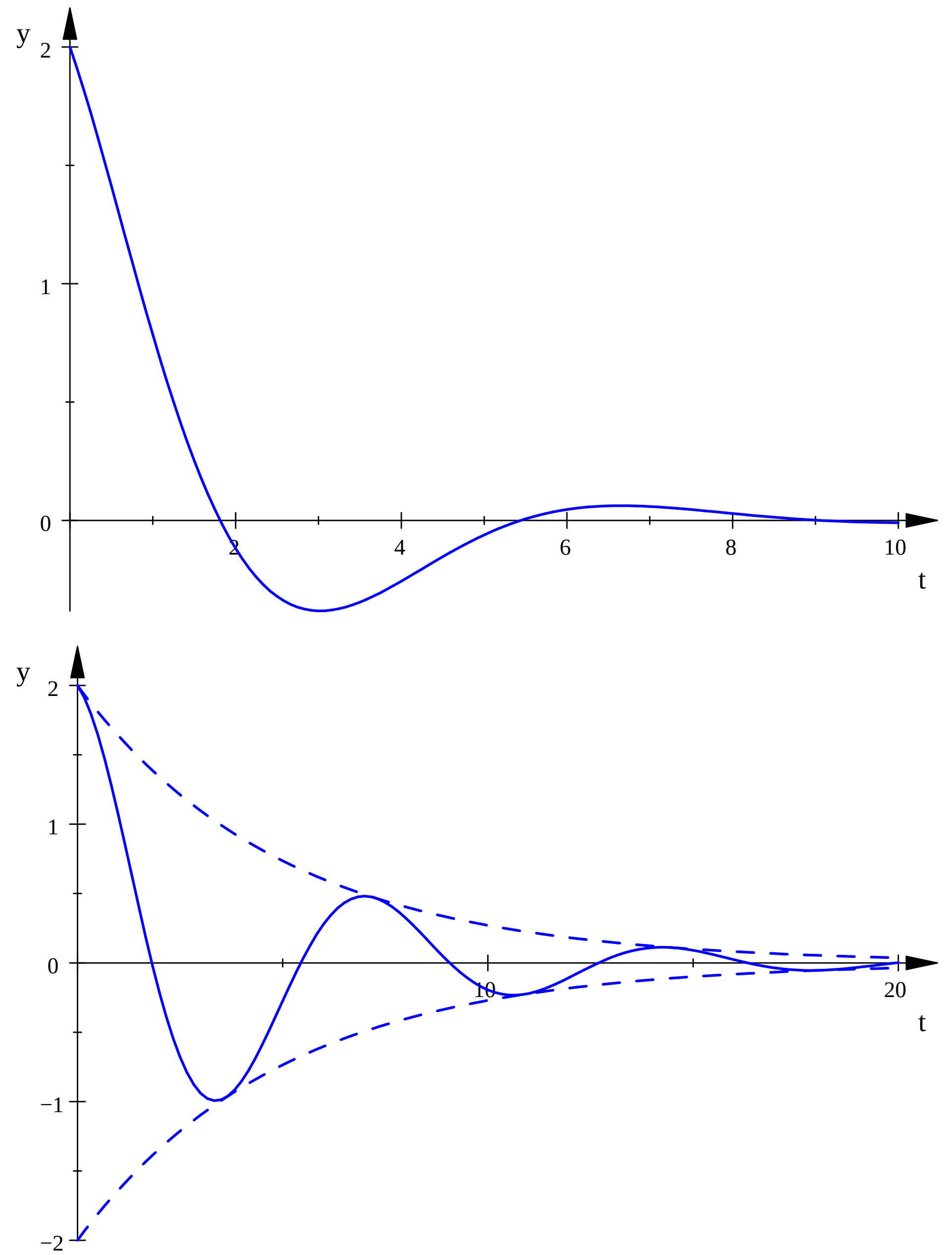


Abbildung 66: Der obere Graph gehört zur Lösung der Differentialgleichung in (60). Darunter ist der Graph einer Funktion dieses Typs, bei der die Dämpfung nicht so stark ist. Gestrichelt sind der Graph der Exponentialfunktion vom Typ e^{-kt}, die die Dämpfung bewirkt, und ihr Spiegelbild an der x–Achse eingezeichnet. Zwischen diesen beiden Kurven schwingt die Kosinuskurve.