

# Lineare Algebra und Geometrie

Lk13 Abi 08

4. Mai 2008

# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Der Spaltenraum <math>\mathbb{R}^n</math> und geometrische Interpretationen</b>	<b>3</b>
1.1	Der Spaltenraum $\mathbb{R}^N$ . . . . .	3
1.2	Geometrische Interpretation für $N = 2$ und für $N = 3$ . . . . .	3
1.3	Wie man die Vektormengen technisch handhabt . . . . .	4
1.4	Das Skalarprodukt . . . . .	6
1.5	Einschub: Über Parallelen . . . . .	7
1.6	Normalenvektor und Gleichung einer Ebene . . . . .	7
1.7	Ein paar Übungsaufgaben zur Raumgeometrie . . . . .	9
<b>2</b>	<b>Erste Klausur – September 2007</b>	<b>9</b>
<b>3</b>	<b>Matrixabbildungen 1</b>	<b>10</b>
3.1	Bezeichnungen . . . . .	10
3.2	Einige Eigenschaften von Matrixabbildungen . . . . .	11
3.3	Matrizenmultiplikation . . . . .	11
3.4	Abbildungen der Ebene, inverse Matrix . . . . .	12
3.5	Übungen . . . . .	13
3.6	Einschub: Lineare Unabhängigkeit und Dimension . . . . .	14
3.7	Übungen . . . . .	15
3.8	Einschub: Lösungsmengen Linearer Gleichungssysteme . . . . .	16
3.9	Das Gram–Schmidtsche Orthogonalisierungsverfahren . . . . .	17
<b>4</b>	<b>Zweite Klausur – November 2007</b>	<b>17</b>
<b>5</b>	<b>Matrixabbildungen 2</b>	<b>18</b>
5.1	Projektionen . . . . .	18
5.2	Determinanten . . . . .	19
5.3	Eigenwerte und Eigenvektoren . . . . .	20
5.4	Technisches zu Matrizen . . . . .	21
<b>6</b>	<b>Stochastische Matrizen</b>	<b>23</b>
6.1	Das Wetterbeispiel zur Einführung . . . . .	23
6.2	Genauere Untersuchung des Wetterbeispiels . . . . .	24
6.3	Der Einfluss der Eigenwerte von $A$ auf $A^n$ . . . . .	25
6.4	Absorbierende Zustände . . . . .	25
6.5	Aussagen über die Laufzeit des Prozesses . . . . .	27
6.6	Alternative Berechnung der mittleren Prozesslaufzeit . . . . .	28
6.7	Stochastische Matrizen und konvexe Mengen . . . . .	29
<b>7</b>	<b>Aufgaben</b>	<b>30</b>
7.1	Aufgaben zu konvexen Mengen . . . . .	30
7.2	Aufgabe LK Abitur 06 . . . . .	31
<b>8</b>	<b>Dritte Klausur – Februar 2008</b>	<b>32</b>
<b>9</b>	<b>Schluszklausur</b>	<b>33</b>
<b>10</b>	<b>Ratschläge für die Vorbereitung auf die Abiturklausur</b>	<b>34</b>
10.1	Analysis . . . . .	35
10.2	Stochastik . . . . .	35
10.3	Lineare Algebra und Geometrie . . . . .	35

# 1 Der Spaltenraum $\mathbb{R}^n$ und geometrische Interpretationen

## 1.1 Der Spaltenraum $\mathbb{R}^N$

Hier ist kurz zusammengestellt, was wir uns zurechtgelegt haben. Motivationen und Erklärungen aus dem Unterricht sind weggelassen.

### 1 Definition

Für natürliche Zahlen  $N$  definieren wir den Spaltenraum  $\mathbb{R}^N$  durch

$$\mathbb{R}^N := \left\{ \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_N \end{pmatrix} \mid a_i \in \mathbb{R} \text{ für } i = 1, \dots, N \right\} .$$

Die Elemente des  $\mathbb{R}^N$  nennen wir Vektoren und bezeichnen sie mit  $\vec{a}, \vec{b}, \vec{x}, \dots$ . Wir rechnen mit ihnen auf folgende Weise: Für  $\vec{a}, \vec{b} \in \mathbb{R}^N$ ,

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_N \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_N \end{pmatrix} \quad \text{und } r \in \mathbb{R} \text{ setzen wir } \vec{a} + \vec{b} := \begin{pmatrix} a_1 + b_1 \\ a_2 + b_2 \\ \vdots \\ a_N + b_N \end{pmatrix} \quad \text{und } r\vec{a} := \begin{pmatrix} ra_1 \\ ra_2 \\ \vdots \\ ra_N \end{pmatrix} .$$

So geht es zu in der modernen Algebra: Man betrachtet alle möglichen Mengen und rechnet mit den Elementen der Mengen auf geeignete Weise. Dadurch erhalten die Mengen Strukturen, und die werden – mit Gewinn – studiert. Es geht dabei allerdings nur scheinbar beliebig zu, die Begriffsbildungen müssen schon sinnvoll sein. Zum Beispiel multipliziert man nicht Vektoren komponentenweise, wie man es ja tun könnte, weil diese Multiplikation keine nützlichen Eigenschaften hätte.

Man zeigt durch leichte Rechnungen, dass für die Addition von Vektoren die gleichen Regeln gelten wie für die Addition von Zahlen und dass für die eingeführte Multiplikation mit reellen Zahlen Distributivgesetze gelten.

## 1.2 Geometrische Interpretation für $N = 2$ und für $N = 3$

Für  $N = 2$  bzw.  $N = 3$  kann man die Vektoren als Koordinatenspalten von Punkten der Ebene bzw. des Raumes interpretieren. Dabei steht der Vektor  $\vec{a}$  manchmal für den Punkt  $A$ , dessen Koordinaten durch die Einträge von  $\vec{a}$  gegeben sind, manchmal aber auch für den Pfeil  $\overrightarrow{OA}$ , der im Nullpunkt beginnt und dessen Spitze  $A$  ist.

Hier kannst du schon spüren, dass die (scheinbar willkürliche) Definition der Addition und der Vielfachenbildung einigermaßen zwingend ist: Der Pfeil, der zu  $\vec{a} + \vec{b}$  gehört, ist genau der Pfeil, der sich ergibt, wenn man die Pfeile zu  $\vec{a}$  und zu  $\vec{b}$  zusammensetzt, wie man es vom Kräfteparallelogramm kennt, und  $r\vec{a}$  ist für  $r > 0$  der Pfeil, der in die gleiche Richtung zeigt wie der zu  $\vec{a}$ , der aber die  $r$ -fache Länge hat. Ferner ist für  $\vec{a} \neq \vec{0}$  durch

$$\langle \vec{a} \rangle := \{ r\vec{a} \mid r \in \mathbb{R} \} \tag{1}$$

die Gerade durch den Nullpunkt gegeben, deren Richtung durch  $\vec{a}$  gegeben ist, also die Gerade durch  $O$  und  $A$ .

Wir setzen für  $M \subseteq \mathbb{R}^N$  und  $\vec{b} \in \mathbb{R}^N$

$$\vec{b} + M := \{ \vec{b} + \vec{m} \mid \vec{m} \in M \} .$$

Die Punktmenge, die zu  $\vec{b} + M$  gehört, ergibt sich dann aus der Menge der Punkte zu  $M$  durch die Verschiebung, die durch den Vektor  $\vec{b}$  gegeben ist. Insbesondere sind für  $\vec{a} \neq \vec{0}$

$$\langle \vec{a} \rangle \quad \text{und} \quad \vec{b} + \langle \vec{a} \rangle$$

parallele Geraden. Die eine geht durch den Nullpunkt  $O$ , die andere durch  $B$ . Man nennt  $\vec{a}$  einen **Richtungsvektor** und  $\vec{b}$  einen **Stützvektor** der Geraden

$$\vec{b} + \langle \vec{a} \rangle = \{ \vec{b} + r\vec{a} \mid r \in \mathbb{R} \} .$$

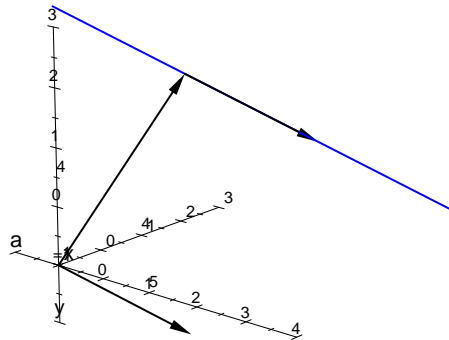


Abbildung 1: Gerade mit Stützvektor und Richtungsvektor

Offensichtlich ist für Vektoren  $\vec{a}, \vec{b} \in \mathbb{R}^3$ , wo nicht einer ein Vielfaches des anderen ist, durch

$$E_0 = \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle := \{ r\vec{a} + s\vec{b} \mid r, s \in \mathbb{R} \}$$

eine Ebene durch den Nullpunkt gegeben. Entsprechend beschreibt dann für ein  $\vec{c} \in \mathbb{R}^3$

$$E_1 = \vec{c} + \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle$$

eine zu dieser parallele Ebene durch  $C$ . Die ganze Sache ist in Abbildung 2 auf der Seite 5 bildlich dargestellt, so gut es eben geht. Im oberen Bild sind Koordinatenachsen mit eingezeichnet, aber hier stören die eigentlich nur. Das untere Bild zeigt eher, worauf es ankommt. Du erkennst den Koordinatenursprung. Die Vektoren  $\vec{a}$  und  $\vec{b}$  erzeugen die Ebene  $E_0$  durch den Nullpunkt. Der Stützvektor  $\vec{a}$  zeigt vom Nullpunkt nach oben, die Ebene  $E_1$  ist als Rechteck angedeutet. Der Pfeil zu  $\vec{c}$  endet im Diagonalschnittpunkt des Rechtecks, Pfeile zu  $\vec{a}$  und zu  $\vec{b}$  sind dort noch einmal angeheftet.

Für Raumpunkte  $A, B, C$ , die nicht auf einer Geraden liegen, sind die Gerade  $g$  durch  $A$  und  $B$  bzw. die Ebene  $E$  durch  $A, B$  und  $C$  gegeben durch

$$g = \vec{a} + \langle \vec{b} - \vec{a} \rangle \quad \text{bzw.} \quad E = \vec{c} + \langle \vec{a} - \vec{c}, \vec{b} - \vec{c} \rangle .$$

### 1.3 Wie man die Vektormengen technisch handhabt

Wir haben für Geraden und Ebenen sehr elegante Schreibweisen. Für die Alltagsarbeit musst du wissen, wie man damit umgeht. Ich zeige es dir anhand einiger Beispiele. Wir nehmen eine Gerade  $g = \vec{a} + \langle \vec{b} \rangle$ , eine Ebene  $E = \vec{c} + \langle \vec{d}, \vec{e} \rangle$  und einen Punkt  $P$  mit

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{c} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \vec{d} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}, \quad \vec{e} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \vec{p} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} .$$

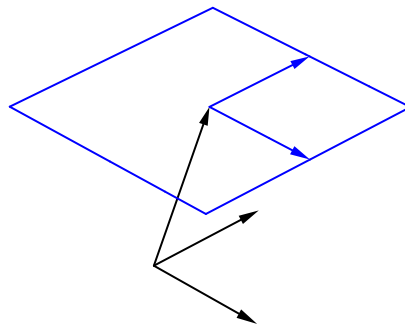
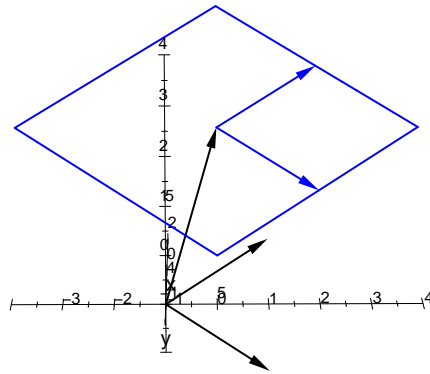


Abbildung 2: Eine Ebene in der Darstellung  $\vec{c} + \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle$

Wir untersuchen einige Fragen.

**Liegt der Punkt  $P$  auf der Geraden  $g$ ?**

Es ist

$$\vec{x} \in g \iff \vec{x} \in \vec{a} + \langle \vec{b} \rangle \iff \vec{x} = \vec{a} + r\vec{b} \quad \text{für ein } r \in \mathbb{R}.$$

Die Frage ist also, ob sich  $\vec{p}$  in der angegebenen Form darstellen lässt, ob es also eine Zahl  $r$  so gibt, dass  $\vec{p} = \vec{a} + r\vec{b}$ . Wir setzen die gegebenen konkreten Vektoren ein und bedenken, dass Gleichheit der Vektoren auf den beiden Seiten der Vektorgleichung nur vorliegt, wenn in jeder Komponente Gleichheit gegeben ist, wenn also das durch  $r\vec{b} = \vec{p} - \vec{a}$  gegebene  $3 \times 1$ -Gleichungssystem

$$\begin{aligned} 2r &= -1 \\ r &= -2 \\ r &= 7 \end{aligned}$$

eine Lösung hat.<sup>1</sup> Das ist offensichtlich nicht der Fall, die zweite Gleichung verlangt  $r = -2$ , die dritte  $r = 7$ . Der Punkt  $P$  liegt nicht auf  $g$ .

**Liegt der Punkt  $P$  in der Ebene  $E$ ?**

Jeder Vektor der Vektormenge  $E$  lässt sich in der Form

$$\vec{x} = \vec{c} + r\vec{d} + s\vec{e} \quad \text{mit } r, s \in \mathbb{R}$$

<sup>1</sup>Rümpfe nicht die Nase, ein  $3 \times 1$ -Gleichungssystem ist natürlich kein ernster Gegner. Aber Lineare Gleichungssysteme sind sensible Konstrukte, du musst beim Aufschreiben äußerste Sorgfalt walten lassen.

darstellen. Der Punkt  $P$  liegt genau dann in  $E$ , wenn das durch

$$r\vec{d} + s\vec{e} = \vec{p} - \vec{c}$$

gegebene  $3 \times 2$ -LGS<sup>2</sup>

$$\begin{array}{rcl} 2r & + & s & = & 1 \\ 2r & + & 4s & = & 1 \\ -3r & + & 6s & = & 5 \end{array}$$

für  $r$  und  $s$  eine Lösung hat.<sup>3</sup> Ein LGS löst du grundsätzlich mit dem Gaußschen Algorithmus! Den führe ich jetzt hier nicht vor, er ist im Buch gut beschrieben. Statt dessen übertrage ich das LGS in die Vektor-Matrix-Schreibweise

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 4 \\ -3 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r \\ s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}$$

und gebe es in MuPAD ein.<sup>4</sup> Es zeigt sich, dass  $P$  nicht in  $E$  liegt. Das musst du natürlich per Hand ausrechnen können.

### Suche die Schnittmenge von $E$ und $g$

Hier gilt es, alle Vektoren zu bestimmen, die sich gleichzeitig in der allgemeinen Form  $\vec{x}(r)$  des Vektors aus  $g$  und des Vektors  $\vec{y}(s, t)$  aus  $E$  schreiben lassen.<sup>5</sup> Es sind also Zahlen  $r, s$  und  $t$  so zu bestimmen, dass

$$\vec{a} + r\vec{b} = \vec{c} + s\vec{d} + t\vec{e}$$

gilt. Wir formen dies um zu

$$r\vec{b} - s\vec{d} - t\vec{e} = \vec{c} - \vec{a}$$

und haben es nun mit einem  $3 \times 3$ -LGS zu tun. Koeffizientenmatrix, rechte Seite und Lösungsvektor des LGS sind

$$\begin{pmatrix} 2 & -2 & -1 \\ 1 & -2 & -4 \\ 1 & 3 & -6 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \begin{pmatrix} \frac{3}{13} \\ \frac{43}{39} \\ \frac{10}{39} \end{pmatrix} = \frac{1}{39} \begin{pmatrix} 9 \\ 43 \\ 10 \end{pmatrix} .$$

Nicht, dass du jetzt den Lösungsvektor als Schnittpunkt nimmst! Den Schnittpunkt von  $E$  und  $g$  bekommst du, wenn du  $\vec{x}(\frac{3}{13})$  bildest oder wenn du  $\vec{y}(\frac{43}{39}, \frac{10}{39})$  bildest. Es ist

$$\vec{a} + \frac{3}{13}\vec{b} = \vec{c} + \frac{43}{39}\vec{d} + \frac{10}{39}\vec{e} = \begin{pmatrix} \frac{19}{13} \\ \frac{29}{13} \\ -\frac{36}{13} \end{pmatrix} = \frac{1}{13} \begin{pmatrix} 19 \\ 29 \\ -36 \end{pmatrix} .$$

## 1.4 Das Skalarprodukt

### 2 Definition

Für

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_N \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_N \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^N$$

definieren wir das **Skalarprodukt**  $\vec{a} * \vec{b}$  durch

$$\vec{a} * \vec{b} := \sum_{k=1}^N a_k b_k \quad ,$$

<sup>2</sup>LGS ist die übliche Abkürzung für „Lineares Gleichungssystem“

<sup>3</sup>Die Lösung fassen wir als Vektor des  $\mathbb{R}^2$  auf!

<sup>4</sup>siehe PinE.mn

<sup>5</sup>Wenn du in der Darstellung des Vektors aus  $g$  als Laufvariable  $r$  nimmst, darfst du in der Darstellung des Vektors aus  $E$  nicht mehr  $r$  nehmen.

und wir nennen  $\vec{a}$  und  $\vec{b}$  genau dann **orthogonal**, wenn  $\vec{a} * \vec{b} = 0$  ist.

Das griechische Wort „orthogonal“ bedeutet „senkrecht“, und in der Tat stehen für  $N = 3$  und  $\vec{a}, \vec{b} \neq \vec{0}$  genau dann die Pfeile zu  $\vec{a}$  und  $\vec{b}$  senkrecht zu einander, wenn  $\vec{a}$  und  $\vec{b}$  orthogonal sind. Wir werden das Skalarprodukt benutzen, um geometrische Fragen im Anschauungsraum zu lösen.

Du magst davon gehört haben, dass es Räume höherer Dimension als 3 gebe. Niemand hat solche Räume jemals gesehen. Aber man benutzt den  $\mathbb{R}^N$  und deutet dessen Elemente als Punkte oder Pfeile, wie wir es für  $N = 3$  gemacht haben. Man nennt Mengen der Form  $\vec{a} + \langle \vec{b} \rangle$  für  $\vec{a}, \vec{b} \in \mathbb{R}^N, \vec{b} \neq \vec{0}$  Geraden usw., und das Skalarprodukt im  $\mathbb{R}^N$  bietet die Möglichkeit, dort auch davon zu reden, dass etwas auf einander senkrecht stehe. So benutzt man die sichere und solide Algebra, um höherdimensionale Geometrie zu schaffen. Ja, du hast richtig gelesen; es handelt sich um Schöpfungen des menschlichen Geistes, nicht um etwas Vorgefundenes.

### Rechenregeln für das Skalarprodukt

Es gelten folgende Regeln, die du leicht nachrechnen kannst.

$$\vec{a} * \vec{b} = \vec{b} * \vec{a}, \quad \vec{a} * (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} * \vec{b} + \vec{a} * \vec{c} \quad \text{und} \quad \vec{a} * (r\vec{b}) = r(\vec{a} * \vec{b})$$

für alle  $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in \mathbb{R}^N$  und alle  $r \in \mathbb{R}$ .

## 1.5 Einschub: Über Parallelen

Liebe Freunde, das sind jetzt keine harmlosen Übungsaufgaben zum Skalarprodukt, sondern substantielle Fragen mit einem recht brisanten Hintergrund. Überhaupt, die Parallelen haben es in sich. Der Ungar Farkas Bolyai, ein Studienfreund Gaußens, warnte seinen Sohn Janos dringend davor, sich mit Parallelen zu beschäftigen, weil ihm selbst die Arbeit an diesem Problem nichts als Frustration gebracht hatte, wie übrigens vielen Mathematikern vor ihm.

**Ausgangssituation:** Wir gehen in die Ebene und versehen sie mit dem üblichen Koordinatensystem. Stellen wir uns doch gleich in den Nullpunkt und betrachten wir die Gerade  $g$  mit der Gleichung  $y = -1$ . Es sei  $P(t) = (t | -1)$  ein Punkt von  $g$  und es sei  $A$  der Punkt  $(0|1)$ .

1. Stelle dir vor,  $t$  laufe gegen Unendlich. Was macht die Gerade durch  $A$  und  $P(t)$ ? Johannes legte mir die Vorstellung nahe, dass im Grenzfall die Gerade  $AP(t)$  in die Parallele zu  $g$  durch  $A$  übergehe, sich folglich Parallelen im Unendlichen schneiden. Die Idee hat ihren Charme. Kannst du ihr etwas abgewinnen?
2. Falls ja: Drehe dich um und lasse  $t$  gegen  $-\infty$  laufen. Gibt es dann nicht einen zweiten Schnittpunkt von  $g$  und ihrer Parallelen durch  $A$ ? Sind das nun zwei „unendlich ferne“ Punkte oder fallen sie zusammen?
3. Betrachte für  $t > 0$  das Dreieck  $AP(-t)P(t)$ . Es gibt Geraden durch  $A$ , die mit dem Dreieck nur den Punkt  $A$  gemeinsam haben. Wie viele Geraden durch  $A$  gibt es denn, die für jedes  $t > 0$  mit dem jeweiligen Dreieck nur den Punkt  $A$  gemeinsam haben: genau eine, keine oder unendlich viele?
4. Schreibe die Gerade  $g$  und ihre Parallele jeweils in der „Punkt-Richtungs-Form“  $\vec{c} + \langle \vec{d} \rangle$  und suche nach Schnittpunkten.

## 1.6 Normalenvektor und Gleichung einer Ebene

Es sei  $\vec{n} \in \mathbb{R}^3, \vec{n} \neq \vec{0}$ , und  $d \in \mathbb{R}$ . Dann ist

$$\vec{n} * \vec{x} = d \tag{2}$$

ein  $1 \times 3$ -LGS. Wir lösen es für das konkrete Beispiel

$$x - y + 3z = 4 \quad .$$

Den Gaußschen Algorithmus brauchen wir nicht, weil das System schon Treppenform hat. Wir wählen also zwei Variable frei:  $y = r, z = s$ , lösen nach  $x$  auf und schreiben die Lösungsmenge hin:

$$\left\{ \begin{pmatrix} 4 + r - 3s \\ r \\ s \end{pmatrix} \mid r, s \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \mid r, s \in \mathbb{R} \right\} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

Na ja, das ist offensichtlich die Punkt-Richtungs-Form einer Ebene, und, was wir hier gemacht haben, funktioniert im Prinzip für jedes  $\vec{n} \neq \vec{0}$  und für jede rechte Seite  $d$ .

Schauen wir uns an, was die Ebene mit dem  $\vec{n}$  und dem  $d$  zu tun hat.<sup>6</sup> Für  $d = 0$  ist die Sache klar. Es kommt eine Ebene  $E$  durch den Nullpunkt heraus, und der Pfeil zu  $\vec{n}$  steht auf ihr senkrecht;  $\vec{n}$  heißt übrigens ein **Normalenvektor** von  $E$ . Nennen wir wir allgemein die Ebene, die sich für die rechte Seite  $d$  ergibt,  $E_d$ . Es ist also

$$\vec{x} \in E_d \iff \vec{n} * \vec{x} = d \ .$$

Nehmen wir uns ein festes  $\vec{a} \in E_d$  her. Dann gilt

$$\vec{x} \in E_d \iff \vec{n} * \vec{x} = \vec{n} * \vec{a} \iff \vec{n} * (\vec{x} - \vec{a}) = 0 \iff \vec{x} - \vec{a} \in E \ ,$$

also handelt es sich bei  $E_d$  um eine zu  $E$  parallele Ebene; sie ergibt sich aus  $E$  durch Verschiebung um  $\vec{a}$ .

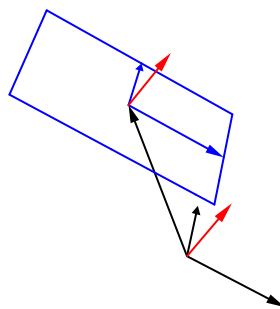


Abbildung 3: Ebene mit Normalenvektor

So weit, so gut. Aber ihr wolltet eine ganz konkrete Bedeutung der Zahl  $d$  auf der rechten Seite haben. Die sieht man so: Die von  $\vec{n}$  erzeugte Gerade  $\langle \vec{n} \rangle$  steht (im geometrischen Sinne) auf  $E_d$  senkrecht, sie wird also  $E_d$  jedenfalls schneiden. Der Schnittpunkt lässt sich in der Form  $r\vec{n}$  schreiben, sonst läge er nicht auf der Geraden, und sein Skalarprodukt mit  $\vec{n}$  muss  $d$  ergeben, sonst läge er nicht in der Ebene  $E_d$ . Folglich ist

$$\vec{n} * (r\vec{n}) = d \ .$$

Daraus berechnet man

$$r = \frac{d}{\vec{n} * \vec{n}} \ ,$$

und dies lehrt uns Folgendes:

1. Für  $d > 0$  kommt man vom Nullpunkt aus zur Ebene  $E_d$ , wenn man in der Richtung läuft, in die  $\vec{n}$  zeigt.

<sup>6</sup>Da muss ich jetzt nur ausführen, was ihr mit euren Ideen angeregt habt.



- Für  $d < 0$  kommt man vom Nullpunkt aus zur Ebene  $E_d$ , wenn man gegen die Richtung läuft, in die  $\vec{n}$  zeigt.
- Der Abstand der Ebene  $E_d$  vom Nullpunkt ist gegeben durch

$$|r\vec{n}| = \left| \frac{d}{\vec{n} * \vec{n}} \vec{n} \right| = \frac{|d|}{|\vec{n}|} .$$

## 1.7 Ein paar Übungsaufgaben zur Raumgeometrie

Rechne in den folgenden Aufgaben allgemein, so weit du kannst. Die Ansätze musst du in jedem Fall erst einmal allgemein hinschreiben. Benutze dann diese Vektoren:

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{c} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \vec{d} = \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix} .$$

- Es sei  $g = \vec{a} + \langle \vec{b} \rangle$  und es sei  $E$  die Ebene mit der Gleichung  $x - y + z = 4$ . Berechne den Schnittpunkt  $S$  von  $E$  und  $g$ .
- Gibt es in  $E$  eine Gerade durch  $S$ , die auf  $g$  senkrecht steht?
- Gib zwei Ebenen an, die sich in  $g$  schneiden.
- Welchen Radius hat die Kugel, deren Mittelpunkt der Nullpunkt ist und die die Ebene  $E$  berührt? Welche Gleichung hat die Kugel?
- Finde einen Punkt  $P$  in  $E$ , dessen  $z$ -Koordinate 1 und dessen  $x$ -Koordinate 2 ist. Wie viele Möglichkeiten gibt es?
- Eine Kugel mit dem Mittelpunkt  $M$  und mit dem Radius 5 berührt die Ebene  $E$  in  $P$ . Finde solch ein  $M$  und schreibe eine Gleichung für deine Kugel hin. Wie viele Möglichkeiten für  $M$  gibt es?
- Finde Punkte  $X$  auf  $g$  und  $Y$  auf  $h = \vec{c} + \langle \vec{d} \rangle$  so, dass die Strecke  $\overline{XY}$  möglichst kurz ist.
- Schneiden sich  $g$  und  $h$ ?
- Finde eine Punkt-Richtungs-Form für  $E$ .
- Was bedeuten die Mengen  $M_1 = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^3 \mid \vec{x} * \vec{x} \leq 36\}$  und  $M_2 = \{r\vec{a} + s\vec{b} \mid 0 \leq r, s \leq 1\}$  mit zwei festen Vektoren  $\vec{a}, \vec{b} \in \mathbb{R}^3$  geometrisch?
- Finde eine Gleichung für die Menge aller  $\vec{x} \in \mathbb{R}^3$ , die mit  $\vec{e}_3$  den Winkel  $60^\circ$  bilden.

## 2 Erste Klausur – September 2007

- Es sei

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \vec{c} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \vec{d} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} .$$

- Zeichne die Gerade  $g = \vec{a} + \langle \vec{b} \rangle$  und die Gerade  $h$  durch  $C$  und  $D$  in ein Koordinatensystem.
- Untersuche, ob sich  $g$  und  $h$  schneiden, und berechne gegebenenfalls den Schnittpunkt.
- Zeichne die Parallele  $g'$  zu  $g$  durch  $C$  ein und gib eine Punkt-Richtungs-Form für  $g'$  an.

- (d) Berechne den Winkel zwischen  $g'$  und  $h$ .
2. Begründe, dass die Ebenen mit den Gleichungen  $2x - y + 3z = 4$  und  $2x - y + 3z = -1$  parallel sind, bestimme ihren Abstand und untersuche, ob der Nullpunkt zwischen den Ebenen liegt.
3. Es sei  $O$  der Koordinatenursprung, und es sei  $B$  der Punkt mit den Koordinaten  $(3|4|12)$ . Die Strecke  $\overline{OB}$  sei Durchmesser einer Kugel. Gib eine Gleichung für die Kugel an, zeige, dass der Punkt  $C$  mit den Koordinaten  $(4|8|6)$  auf der Kugel liegt, und zeige, dass die Strecken  $\overline{CO}$  und  $\overline{CB}$  auf einander senkrecht stehen. Ist Letzteres wohl Zufall?
4. (a) Zeichne einen Würfel mit der Kantenlänge 2 so in ein räumliches Koordinatensystem, dass der Ursprung eine Ecke des Würfels ist und die Kanten, die in dieser Ecke zusammenstoßen, auf den (positiven) Koordinatenachsen liegen.
- (b) Die Mittelpunkte der Kanten, die im Ursprung zusammenstoßen, bilden ein Dreieck. Zeichne das Dreieck ein und gib für die Ebene  $E$ , in der das Dreieck liegt, eine Gleichung und eine Punkt-Richtungs-Form an.
- (c) Wie groß ist der Inhalt des Dreiecks?
- (d) Welchen Abstand hat der Eckpunkt des Würfels, der auf der positiven  $x$ -Achse liegt, von der Ebene  $E$ ?
5. Es seien  $\vec{a}, \vec{b} \in \mathbb{R}^3$  mit  $\vec{a} * \vec{a} = \vec{b} * \vec{b} = 1$  und  $\vec{a} * \vec{b} = 0$ .
- (a) Was bedeuten die angegebenen Bedingungen für  $\vec{a}$  und  $\vec{b}$  geometrisch?
- (b) Berechne  $(\vec{a} + \vec{b}) * (\vec{a} + \vec{b})$  und  $(\vec{a} + \vec{b}) * (\vec{a} - \vec{b})$ .
- (c) Es sei  $\vec{p}(t) = \cos(t)\vec{a} + \sin(t)\vec{b}$ . Zeige, dass  $\vec{p}(t) * \vec{p}(t) = 1$  ist.
- (d) Unter  $E := \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle$  stellen wir uns eine Ebene im Raum vor, die den Nullpunkt enthält. Nimm an, du ständest im Nullpunkt auf der Ebene und du schautest auf die Ebene in der Nähe des Nullpunktes. Die Vektoren  $\vec{a}$  und  $\vec{b}$  sähest du als Pfeile. Zeichne diese Pfeile, dazu die zu  $\vec{a} + \vec{b}$  und zu  $\vec{a} - \vec{b}$ .
- (e) Zeichne in deine Zeichnung zum letzten Aufgabenteil die Kurve ein, die der Punkt  $P(t)$  durchläuft, wenn  $t$  von 0 bis  $2\pi$  läuft.
- (f) Wir nehmen zusätzlich einen Vektor  $\vec{c} \in \mathbb{R}^3, \vec{c} \neq \vec{0}$ , mit  $\vec{a} * \vec{c} = \vec{b} * \vec{c} = 0$ . Daniel (U) zur Freude betrachten wir die Menge

$$\{\vec{p}(t) + s\vec{c} \mid 0 \leq t \leq 2\pi, -1 \leq s \leq 5\} .$$

Was ist das geometrisch?

- (g) Finde konkrete Vektoren  $\vec{a}, \vec{b}$  und  $\vec{c}$ , die die in der Aufgabe genannten Bedingungen erfüllen.

### 3 Matrixabbildungen 1

Wir werden uns jetzt einige Zeit mit Matrixabbildungen befassen, das sind Abbildungen der Form  $\vec{x} \mapsto A\vec{x}$  für eine Matrix  $A$ . Zunächst erinnere ich an einige Bezeichnungen, dann stellen wir die wichtigsten Eigenschaften von Matrixabbildungen zusammen und studieren einige Beispiele.

#### 3.1 Bezeichnungen

Eine  $n \times m$ -Matrix  $A$  ist ein rechteckiges Zahlenschema mit  $n$  Zeilen und  $m$  Spalten. Der Eintrag  $a_{ij}$  steht in der  $i$ -ten Zeile am Platz  $j$ , also auch in der  $j$ -ten Spalte. Das  $i$  ist der Zeilenindex, das  $j$  der Spaltenindex.

Matrizen sind uns begegnet als Koeffizientenmatrizen von Linearen Gleichungssystemen, und von daher wissen wir auch schon, dass man eine Matrix (von links) an einen Vektor multiplizieren kann und wie das zu geschehen hat:

$$A\vec{x} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nm} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \dots + a_{1m}x_m \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \dots + a_{2m}x_m \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + a_{n3}x_3 + \dots + a_{nm}x_m \end{pmatrix} \quad (3)$$

Es ist auch klar, dass die Anzahl der Spalten der Matrix mit der Anzahl der Einträge des Vektors  $\vec{x}$  übereinstimmen muss und dass der Bildvektor  $A\vec{x}$  so viele Einträge hat wie die Matrix Zeilen:

$$n \times m\text{-Matrix} \cdot m\text{-Vektor} = n\text{-Vektor}$$

Anders gesagt: Die durch eine  $n \times m$ -Matrix  $A$  gegebene Abbildung  $\vec{x} \mapsto A\vec{x}$  bildet den  $\mathbb{R}^m$  in den  $\mathbb{R}^n$  ab. Und der Bildvektor  $A\vec{x}$  eines Vektors  $\vec{x}$  ist schlicht das, was sich ergibt, wenn man die Komponenten von  $\vec{x}$  in die linke Seite des LGS mit der Koeffizientenmatrix  $A$  einsetzt.

### 3.2 Einige Eigenschaften von Matrixabbildungen

Es sei  $A$  eine  $n \times m$ -Matrix. Wir betrachten die durch die Vorschrift  $\vec{x} \mapsto A\vec{x}$  gegebene Abbildung.

1. In den Spalten der Matrix stehen die Bilder der Einheitsvektoren:  $A\vec{e}_j = \vec{a}_j$ .
2. Schreibt man die rechte Seite der Gleichung 3 in naheliegender Weise um, sieht man, dass

$$A\vec{x} = x_1\vec{a}_1 + x_2\vec{a}_2 + \dots + x_m\vec{a}_m$$

ist. Das bedeutet, dass die Linearkombination  $\vec{x} = x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2 + \dots + x_m\vec{e}_m$  der  $\vec{e}_j$  auf die entsprechende Linearkombination der  $\vec{a}_j$  geht.

3. Es ist  $A(\vec{x} + \vec{y}) = A\vec{x} + A\vec{y}$  und  $A(r\vec{x}) = r(A\vec{x})$  für alle  $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^m$  und alle  $r \in \mathbb{R}$ .

Aus diesen Eigenschaften ergibt sich:

1. Matrixabbildungen respektieren (wenigstens zum Teil) die geometrische Struktur des Raumes.
2. Die Matrixabbildung ist schon durch die Bilder der Einheitsvektoren vollständig festgelegt.

### 3.3 Matrizenmultiplikation

Es sei  $A$  eine  $n \times m$ -Matrix. Dann ist durch  $\varphi_A : \vec{x} \mapsto A\vec{x}$  eine Matrixabbildung  $\varphi_A : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$  definiert. Nun soll durch eine weitere Matrix  $B$  entsprechend eine weitere Matrixabbildung  $\varphi_B : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^l$  gegeben sein, dazu muss  $B$  eine  $l \times n$ -Matrix sein.

Auf ein  $\vec{x} \in \mathbb{R}^m$  kann man zunächst  $\varphi_A$  und dann auf das Ergebnis die Abbildung  $\varphi_B$  anwenden:

$$\vec{x} \xrightarrow{\varphi_A} A\vec{x} \xrightarrow{\varphi_B} B(A\vec{x})$$

Insgesamt ist dadurch eine Matrixabbildung  $\varphi_C : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^l$  gegeben. Um die  $l \times m$ -Matrix  $C$  zu bestimmen, untersuchen wir, was aus den  $\vec{e}_j \in \mathbb{R}^m$  wird:

$$\vec{e}_j \xrightarrow{\varphi_A} A\vec{e}_j = \vec{a}_j \xrightarrow{\varphi_B} B\vec{a}_j$$

Folglich ist der  $j$ -te Spaltenvektor  $\vec{c}_j$  der Produktmatrix  $C = BA$  gegeben durch  $\vec{c}_j = B\vec{a}_j$ :

$$BA = B(\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_m) = (B\vec{a}_1, B\vec{a}_2, \dots, B\vec{a}_m) \quad (4)$$

Du musst dich mit der Technik gut vertraut machen, sonst wendest du sie im Ernstfall nicht richtig an. Ein Beispiel schreibe ich hier nicht hin, du findest welche im Buch.

Bei quadratischen Matrizen liegt ein Sonderfall vor, du kannst sie potenzieren. Das läuft darauf hinaus, dass du die gegebene Abbildung mehrfach anwendest.

**Beispiel** Die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

ist die Matrix der Drehung der Ebene um den Nullpunkt um  $90^\circ$ . Also ist  $A^2$  die Matrix der Drehung der Ebene um  $180^\circ$  und  $A^4$  die Matrix der Drehung der Ebene um  $360^\circ$ , also der identischen Abbildung, die alles festlässt. In der Tat ist

$$A^2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad A^4 = (A^2)^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} .$$

### 3.4 Abbildungen der Ebene, inverse Matrix

Die Drehung der Ebene um den Nullpunkt um den Winkel  $\alpha$  gegen den Uhrzeigersinn ist eine Matrixabbildung mit der Matrix

$$M(\alpha) = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix} , \quad (5)$$

und die Spiegelung der Ebene an der  $x$ -Achse ist eine Matrixabbildung mit der Matrix

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} . \quad (6)$$

Führt man die Spiegelung zweimal aus, ist alles wieder, wie es vorher war, und in der Tat ist die Matrix

$$S^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

die  $2 \times 2$ -Einheitsmatrix  $E$  mit  $E\vec{x} = \vec{x}$  für alle  $\vec{x} \in \mathbb{R}^2$ .

Auch die Drehung um  $\alpha$  kann man rückgängig machen, indem man um  $-\alpha$  dreht. Da  $\cos(-\alpha) = \cos(\alpha)$  und  $\sin(-\alpha) = -\sin(\alpha)$  ist, gilt

$$M(-\alpha) = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & \sin(\alpha) \\ -\sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix} .$$

Wieder ist  $M(\alpha)M(-\alpha) = E$ .

Da man Matrizen multipliziert und die Matrix  $E$  dabei die Rolle der Eins übernimmt, nennt man eine Matrix, die mit einer quadratischen Matrix  $M$  multipliziert  $E$  ergibt, **inverse Matrix** zu  $M$ , und man bezeichnet sie mit  $M^{-1}$ . Ich teile hier nur mit, dass es zu jeder quadratischen Matrix  $M$  höchstens eine inverse Matrix gibt und dass dann  $MM^{-1} = M^{-1}M = E$  ist.

Für unsere Drehmatrizen ist

$$M(\alpha)^{-1} = M(-\alpha) . \quad (7)$$

Es sei nun  $P = (a|b)$  ein Punkt der Ebene, aber nicht der Nullpunkt. Wir suchen eine Drehung, die den Punkt  $P$  auf die (positive)  $x$ -Achse bringt. Nun brauchen wir nicht den Drehwinkel selbst, sondern nur dessen Sinus- und Kosinuswert. Die sind aber leicht zu gewinnen. Der Punkt mit dem Ortsvektor

$$\frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2}} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

ist nämlich der Schnittpunkt des Strahls, der im Nullpunkt beginnt und durch  $P$  geht, mit dem Einheitskreis. Es folgt, dass die Matrix

$$M := \frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2}} \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$$

die Matrix einer Drehung ist, die die positive  $x$ -Achse so dreht, dass ihr Bild durch  $P$  geht. Die inverse Matrix zu  $M$  ist

$$M^{-1} := \frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2}} \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} .$$

Betrachte nun die Abbildung zur Matrix  $MSM^{-1}$ . Zuerst wird die Ebene so um den Nullpunkt gedreht, dass  $P$  auf die positive  $x$ -Achse kommt, dann wird die (gedrehte) Ebene an der  $x$ -Achse gespiegelt und dann wird die gespiegelte Ebene wieder zurückgedreht. Insgesamt haben wir die Ebene an der Geraden durch den Nullpunkt und  $P$  gespiegelt!

### 3 Lemma

Es sei  $M = M(\alpha)$  die Matrix der Drehung der Ebene um  $\alpha$  und es sei  $S$  die Matrix der Spiegelung an der  $x$ -Achse. Dann ist

$$MSM^{-1}$$

die Matrix der Spiegelung an der Geraden  $M\langle \vec{e}_1 \rangle$ , also an der um  $\alpha$  gedrehten  $x$ -Achse.

Ganz beiläufig haben wir die Multiplikation einer Matrix mit einer Zahl eingeführt – das geschieht so, dass jeder Eintrag der Matrix mit der Zahl multipliziert wird – und wir haben einfach eine Menge  $U$  von Vektoren mit einer Matrix  $M$  multipliziert. Der Klarheit halber notieren wir, was damit gemeint ist:

$$MU := \{M\vec{u} \mid \vec{u} \in U\}$$

## 3.5 Übungen

1. Untersuche die folgenden Abbildungen der Ebene in sich. Wie wirken sie auf das Einheitsquadrat und auf den Einheitskreis?

$$\vec{x} \mapsto r\vec{x} \quad \text{für eine feste Zahl } r \neq 0 \text{ (zentrische Streckung)}$$

$$\vec{x} \mapsto \begin{pmatrix} r & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \vec{x} \quad \text{für eine feste Zahl } r \neq 0 \text{ (Dilatation)}$$

$$\vec{x} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \vec{x} \quad \text{für eine feste Zahl } a \text{ (Scherung)}$$

$$\vec{x} \mapsto \vec{x} + \vec{v} \quad \text{für einen festen Vektor } \vec{v} \text{ (Translation } T_{\vec{v}})$$

Hinweis:  $T_{\vec{v}}$  kann im allgemeinen keine Matrixabbildung sein, weil der Nullpunkt nicht fest bleibt.

2. Es sei

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix} .$$

- (a) Gibt es eine Matrixabbildung, die  $\vec{e}_1$  auf  $\vec{a}$  und  $\vec{e}_2$  auf  $\vec{b}$  abbildet?
- (b) Gibt es eine Matrixabbildung, die  $\vec{a}$  auf  $\vec{e}_1$  und  $\vec{b}$  auf  $\vec{e}_2$  abbildet?

3. Finde eine Vorschrift für die Drehung um den Winkel  $\alpha$  gegen den Uhrzeigersinn um den Punkt  $P(2|3)$  der Ebene.

Hinweis: Das kann im Allgemeinen keine Matrixabbildung sein, weil der Nullpunkt dabei nicht fest bleibt.

### 3.6 Einschub: Lineare Unabhängigkeit und Dimension

Wir haben Beispiele für Matrixabbildungen des  $\mathbb{R}^3$  in sich gesehen, bei denen nicht wieder der ganze Raum herauskam. Das schauen wir uns einmal genauer an.

Es sei  $A$  eine  $n \times m$ -Matrix und  $\varphi : \vec{x} \mapsto A\vec{x}$  die durch  $A$  gegebene Matrixabbildung des  $\mathbb{R}^m$  in den  $\mathbb{R}^n$ . Wenn wir wie früher schon die Spaltenvektoren von  $A$  mit  $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_m$  bezeichnen, ist

$$\varphi(\vec{x}) = A\vec{x} = x_1\vec{a}_1 + x_2\vec{a}_2 + \dots + x_m\vec{a}_m = \sum_{k=1}^m x_k\vec{a}_k .$$

Als Bild von  $\varphi$  tritt also jeder Vektor des  $\mathbb{R}^n$  auf, der sich als Linearkombination von  $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_m$  schreiben lässt. Wir setzen

$$\text{Bild } \varphi := \{ \varphi(\vec{x}) \mid \vec{x} \in \mathbb{R}^m \} , \quad (8)$$

dann ist Bild  $\varphi$  das sogenannte **Erzeugnis** von  $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_m$ :

$$\text{Bild } \varphi = \left\{ \sum_{k=1}^m x_k\vec{a}_k \mid x_1, x_2, \dots, x_m \in \mathbb{R} \right\} =: \langle \vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_m \rangle \quad (9)$$

Schauen wir uns an, was Erzeugnisse von Vektoren des  $\mathbb{R}^3$  geometrisch im Raum bedeuten. Das Erzeugnis  $\langle \vec{a}_1 \rangle$  eines Vektors  $\vec{a}_1 \neq \vec{0}$  ist eine Gerade durch den Nullpunkt. Wenn  $\vec{a}_2$  nicht auf dieser Geraden liegt, also  $\vec{a}_2 \notin \langle \vec{a}_1 \rangle$  ist, dann ist  $\langle \vec{a}_1, \vec{a}_2 \rangle$  eine Ebene durch den Nullpunkt. Gehört  $\vec{a}_3$  zu einem Pfeil, der aus der Ebene herausragt, gilt also  $\vec{a}_3 \notin \langle \vec{a}_1, \vec{a}_2 \rangle$ , ist  $\langle \vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3 \rangle$  bereits der ganze Raum. Weiter reicht unsere Anschauung nicht. Es wird dir aber einleuchten, wenn ich sage, dass Bild  $\varphi$  maximale Größe hat, wenn keiner der Vektoren  $\vec{a}_k$  im Erzeugnis  $\langle \vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_{k-1} \rangle$  liegt,  $k = 2, 3, \dots, m$ . In diesem Fall ist Bild  $\varphi$  so groß wie der  $\mathbb{R}^m$ .

Es gibt ein einfaches rechnerisches Kriterium dafür, dass Bild  $\varphi = \langle \vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_m \rangle$  maximale Größe hat, also keines der  $\vec{a}_k$  überflüssig ist:

#### 4 Definition (Lineare Unabhängigkeit)

Wenn

$$x_1\vec{a}_1 + x_2\vec{a}_2 + \dots + x_m\vec{a}_m = \vec{0}$$

nur dann gilt, wenn  $x_1 = x_2 = \dots = x_m = 0$  ist, heißt das System  $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_m$  **linear unabhängig**.

Das System heißt **linear abhängig**, wenn es eine Darstellung des Nullvektors

$$x_1\vec{a}_1 + x_2\vec{a}_2 + \dots + x_m\vec{a}_m = \vec{0}$$

gibt, bei der nicht alle  $x_k = 0$  sind. In diesem Fall kann man die Gleichung nach einem  $\vec{a}_k$  auflösen. Dieses  $\vec{a}_k$  ist dann überflüssig; man kann es weglassen, ohne dass das Erzeugnis  $\langle \vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_m \rangle$  dadurch kleiner wird. Das Erzeugendensystem  $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_m$  von Bild  $\varphi$  ist also genau dann minimal, wenn es linear unabhängig ist. In diesem Fall heißt es **Basis** von Bild  $\varphi$ .

Man kann beweisen, dass zwei minimale Erzeugendensysteme des gleichen Erzeugnisses die gleiche Anzahl von Elementen haben müssen. Diese Anzahl heißt die **Dimension**  $\dim \langle \vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_m \rangle$  des Erzeugnisses.

Will man testen, ob  $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_m$  linear unabhängig ist, muss man die Vektorgleichung

$$x_1\vec{a}_1 + x_2\vec{a}_2 + \dots + x_m\vec{a}_m = \vec{0}$$

lösen; das ist ein LGS mit Koeffizientenmatrix  $A$ . Die Lösungsmenge enthält genau die  $\vec{x} \in \mathbb{R}^m$  mit  $\varphi(\vec{x}) = \vec{0}$ . Man nennt diese Menge den **Kern** der Abbildung  $\varphi$ :

$$\text{Kern } \varphi := \{ \vec{x} \in \mathbb{R}^m \mid \varphi(\vec{x}) = \vec{0} \} \quad (10)$$

Genau dann, wenn Kern  $\varphi$  nur den Nullvektor enthält, ist  $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_m$  linear unabhängig und die Dimension  $\dim \text{Bild } \varphi = m$ . In diesem Fall bettet die Matrixabbildung  $\varphi$  den  $\mathbb{R}^m$  in den  $\mathbb{R}^n$  ein. Das ist natürlich überhaupt nur möglich für  $n \geq m$ , sonst ist der  $\mathbb{R}^n$  zu klein.

### 5 Satz

Es ist  $\dim \mathbb{R}^m = m$ .

Um die Gültigkeit des Satzes einzusehen, müssen wir uns nur klarmachen, dass das Erzeugendensystem  $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_m$  des  $\mathbb{R}^m$  linear unabhängig ist. Nun, aus

$$\vec{0} = \sum_{k=1}^m x_k \vec{e}_k = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix}$$

folgt sofort  $x_1 = x_2 = \dots = x_m = 0$ , fertig. □

## 3.7 Übungen

1. Es sei

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

und es sei  $\varphi : \vec{x} \mapsto A\vec{x}$  die durch  $A$  gegebene Matrixabbildung. Bestimme Kern  $\varphi$  und Bild  $\varphi$  und deren Dimensionen.

2. Es sei  $\varphi : \vec{x} \mapsto A\vec{x}$  für eine  $n \times m$ -Matrix  $A$ . Beweise die folgenden Aussagen und mache dir ihre Bedeutung klar.

$$\varphi(\vec{x}) = \varphi(\vec{y}) \implies \vec{x} - \vec{y} \in \text{Kern } \varphi \tag{11}$$

$$\vec{w} \in \text{Kern } \varphi \implies \varphi(\vec{x} + \vec{w}) = \varphi(\vec{x}) \quad \text{für alle } \vec{x} \in \mathbb{R}^m \tag{12}$$

3. Nach Anwendung des Gaußschen Algorithmus auf eine Matrix  $A$  kam die folgende Matrix heraus:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Berechne den Kern der durch  $A$  gegebenen Matrixabbildung  $\varphi$  und gib ein linear unabhängiges Erzeugendensystem von Bild  $\varphi$  an, das aus Spaltenvektoren von  $A$  besteht.

4. Sind die Vektoren

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

linear unabhängig?

5. Die Vektoren  $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_m$  seien alle  $\neq \vec{0}$  und paarweise orthogonal. Zeige, dass sie dann linear unabhängig sind.

6. Es sei  $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_m$  linear unabhängig. Zeige, dass dann aus

$$\sum_{k=1}^m r_k \vec{a}_k = \sum_{k=1}^m s_k \vec{a}_k$$

folgt, dass  $r_k = s_k$  ist für  $k = 1, 2, \dots, m$ .

7. Es seien  $\vec{a}, \vec{b} \in \mathbb{R}^n$ ,  $\vec{a} \neq \vec{0}$ . Rechne nach, dass

$$\vec{b} - \frac{\vec{b} * \vec{a}}{\vec{a} * \vec{a}} \cdot \vec{a} \perp \vec{a}$$

ist, und interpretiere die Aussage geometrisch.

8. (Julians Problem)

Es sei  $\vec{n} \in \mathbb{R}^3$  ein Vektor der Länge 1 mit den Einträgen  $n_1, n_2, n_3$ . Dann ist durch

$$\vec{x} \mapsto \vec{x} - 2\vec{x} * \vec{n} \cdot \vec{n}$$

eine Spiegelung des Raumes an der Ebene mit der Gleichung  $\vec{n} * \vec{x} = 0$  gegeben. Bestimme die Matrix  $S$  dieser Spiegelung und zeige, dass sie sich in der Form

$$S = E_3 - 2 \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix} \cdot (n_1 \quad n_2 \quad n_3)$$

schreiben lässt. Dabei ist  $E_3$  die  $3 \times 3$ -Einheitsmatrix.

9. Es sei

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \vec{c} = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

- Zeige  $|\vec{a}| = |\vec{b}|$ .
- Gib eine Spiegelung an einer Ebene des Raumes an, die  $\vec{a}$  in  $\vec{b}$  abbildet.
- Gibt es auch eine Spiegelung des Raumes, die  $\vec{a}$  in  $\vec{c}$  abbildet?
- Gib eine Drehung des Raumes an, die  $\vec{a}$  in  $\vec{b}$  abbildet. Es reicht, wenn du Drehachse und Drehwinkel ermittelst; eine Matrix brauchst du nicht anzugeben.

10. Es sei  $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_m$  ein linear unabhängiges System von Vektoren. Beweise, dass dann für jedes  $r \in \mathbb{R}$  das System  $\vec{a}_1, \vec{a}_2 + r\vec{a}_1, \vec{a}_3, \dots, \vec{a}_m$  linear unabhängig ist.

### 3.8 Einschub: Lösungsmengen Linearer Gleichungssysteme

Dank unserer Kenntnisse über Matrixabbildungen können wir eine erschöpfende Auskunft darüber geben, wie die Lösungsmenge eines Linearen Gleichungssystems aussehen kann.

#### 6 Satz

Es sei  $A\vec{x} = \vec{b}$  ein Lineares Gleichungssystem mit Koeffizientenmatrix  $A$ , und es sei  $\varphi : \vec{x} \mapsto A\vec{x}$  die durch  $A$  gegebene Matrixabbildung. Dann gelten die folgenden Aussagen über die Lösungsmenge  $\mathbb{L}$  des Systems.

- Falls  $\vec{b} \notin \text{Bild } \varphi$  ist, ist  $\mathbb{L} = \{\}$ .
- Falls  $\vec{b} \in \text{Bild } \varphi$  ist, gibt es ein  $\vec{x}_0$  so, dass  $\varphi(\vec{x}_0) = \vec{b}$  ist. In diesem Fall ist  $\mathbb{L} = \vec{x}_0 + \text{Kern } \varphi$ .

Eine eindeutige Lösung, das heißt eine einelementige Lösungsmenge, kann es nur geben, wenn  $\text{Kern } \varphi = \{\vec{0}\}$  ist.



### 3.9 Das Gram–Schmidtsche Orthogonalisierungsverfahren

Es sei  $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_m \in \mathbb{R}^n$  linear unabhängig. Dann hat  $U := \langle \vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_m \rangle = m$  die Dimension  $m$ . Das Gram–Schmidt–Verfahren liefert eine Basis von  $U$ , die aus paarweise orthogonalen Vektoren besteht. Die neue Basis  $\vec{b}_1, \vec{b}_2, \dots, \vec{b}_m$  sieht so aus:

$$\begin{aligned}\vec{b}_1 &:= \vec{a}_1 \\ \vec{b}_2 &:= \vec{a}_2 - \frac{\vec{a}_2 * \vec{b}_1}{\vec{b}_1 * \vec{b}_1} \cdot \vec{b}_1 \\ &\vdots \\ \vec{b}_k &:= \vec{a}_k - \sum_{j=1}^{k-1} \frac{\vec{a}_k * \vec{b}_j}{\vec{b}_j * \vec{b}_j} \cdot \vec{b}_j \quad \text{für } k = 3, \dots, m\end{aligned}$$

Den Ausdruck für  $\vec{b}_2$  kennst du schon aus der Übungsaufgabe 7 auf Seite 16: Man zerlegt  $\vec{a}_2$  in eine Summe aus einem Vektor  $r\vec{b}_1$  und einem Vektor  $\vec{c}$ , der zu  $\vec{b}_1$  orthogonal ist:

$$\vec{a}_2 = r\vec{b}_1 + \vec{c}$$

Multipliziert man diese Gleichung skalar mit  $\vec{b}_1$ , kann man  $r$  leicht ausrechnen, weil  $\vec{c} * \vec{b}_1 = 0$  ist, und kann  $\vec{c}$  dann hinschreiben. Wir haben uns den Vorgang geometrisch gut klargemacht.

Entsprechend schreibt man  $\vec{a}_k$  als Summe eines Vektors  $\vec{d} \in U_{k-1} := \langle \vec{b}_1, \vec{b}_2, \dots, \vec{b}_{k-1} \rangle$  und eines Vektors  $\vec{c}$ , der zu  $U_{k-1}$  orthogonal ist:

$$\vec{a}_k = \vec{c} + \vec{d} = \vec{c} + \sum_{j=1}^{k-1} r_j \vec{b}_j$$

Die Vorfaktoren  $r_j$  der  $\vec{b}_j$  in kann man wieder leicht nach skalarer Multiplikation mit  $\vec{b}_j$  ausrechnen und  $\vec{c}$  so bestimmen. Dieses  $\vec{c}$  ist das neue  $\vec{b}_k$ .

Man rechnet leicht nach, dass jedes  $\vec{b}_k$  tatsächlich zu  $\vec{b}_1, \vec{b}_2, \dots, \vec{b}_{k-1}$  orthogonal ist. Und  $\vec{b}_1, \vec{b}_2, \dots, \vec{b}_m$  ist wieder linear unabhängig (siehe Aufgabe 10 auf Seite 16).

Wendet man das Verfahren auf ein System von Vektoren an, das nicht linear unabhängig ist, wird mindestens eines der  $\vec{b}_k$  der Nullvektor sein.

## 4 Zweite Klausur – November 2007

1. Berechne den Vektor  $\vec{e}_1 - 3\vec{e}_2 + 2\vec{e}_3$  des  $\mathbb{R}^3$ .

### 2. Stochastik

Mit Sorge vernimmt Lehrer Druff, was ihm die Stufenleiterin über seinen Schüler Thomas Schlunz erzählt: Wenn Thomas heute in der Schule ist, kommt er am nächsten Schultag mit der Wahrscheinlichkeit 0,8. Fehlt er heute, fehlt er am nächsten Schultag immer noch mit der Wahrscheinlichkeit 0,6. Nun hat Druff den Thomas Schlunz heute in der Schule gesehen, aber die Klausur steht übermorgen an, und in weiteren fünfzig Schultagen ist wieder eine Klausur. Analysiere die Situation auf der Grundlage der angegebenen Daten mit den Mitteln, die wir bisher entwickelt haben, und gib Herrn Druff Auskunft über seine Aussichten, dass Thomas zu den Klausuren erscheint. Übrigens: Herr Druff versteht nichts von Mathematik. Deine Rechnungen kannst du aufschreiben wie immer, aber deine Auskunft für ihn musst du so formulieren, dass er auch etwas davon hat.

### 3. Geometrie

Es sei

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 12 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 13 \end{pmatrix} .$$

Dann gibt es eine Spiegelung  $\sigma$  an einer Ebene durch den Nullpunkt und eine Drehung  $\delta$  um  $180^\circ$  um eine Achse durch den Nullpunkt, die jeweils  $\vec{a}$  in  $\vec{b}$  abbilden.

- Gib eine Gleichung der Ebene an.
- Gib die Drehachse an.
- Wenn ich auf  $\vec{a}$  erst  $\sigma$  und dann  $\delta$  anwende, erhalte ich wieder  $\vec{a}$ . Heißt das, dass jeder Raumpunkt wieder in sich übergeht?
- (Lasse dich nicht verwirren, diese Teilaufgabe hat mit dem ersten Teil nichts zu tun.) Die Abbildung  $\varphi$  dreht die (gewöhnliche  $xy$ -)Ebene um den Punkt  $Z(3|4)$  um  $60^\circ$  gegen den Uhrzeigersinn. Gib eine Abbildungsvorschrift für  $\varphi$  an. Du brauchst die Vorschrift nicht zu vereinfachen, aber sage, ob es sich bei  $\varphi$  um eine Matrixabbildung handeln kann.

### 4. Matrixabbildungen und Lineare Algebra

Es sei

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ -4 & -1 & 2 \\ -6 & -3 & 4 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \varphi : \vec{x} \mapsto C\vec{x}.$$

- Berechne  $AB$  und  $BA$  und gib an, welche geometrischen Abbildungen zu  $A$ ,  $B$ ,  $AB$  und  $BA$  gehören.
- Es ist  $\varphi : \vec{x} \mapsto C\vec{x}$ . Berechne Kern  $\varphi$ , schreibe Bild  $\varphi$  als Erzeugnis mit möglichst wenigen erzeugenden Vektoren und gib dann Auskunft, wie die Lösungsmenge des Linearen Gleichungssystems  $C\vec{x} = \vec{b}$  aussehen kann.
- Orthogonalisiere das System  $\vec{c}_1, \vec{c}_2$  der ersten beiden Spaltenvektoren der Matrix  $C$ .
- Was passierte, wenn du versuchtest,  $\vec{c}_1, \vec{c}_2, \vec{c}_3$  zu orthogonalisieren? Wenn du sagst, dass du dich vermutlich dabei verrechnetest, kann ich dir dafür allerdings keine Punkte geben.
- Schreibe die Definition dafür hin, dass  $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_m \in \mathbb{R}^n$  ein linear unabhängiges System bilden. Die Definition, hörst du, kein metaphysisches Zeug.
- Es sei  $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$  linear unabhängig. Weise nach, dass dann auch  $\vec{a} + r\vec{b} + s\vec{c}, \vec{b}, \vec{c}$  linear unabhängig ist für beliebige  $r, s \in \mathbb{R}$ .

## 5 Matrixabbildungen 2

### 5.1 Projektionen

Wenn du hörst, der Raum werde auf eine Ebene projiziert, kannst du dir vermutlich etwas darunter vorstellen. Zum Beispiel könnte jedem Raumpunkt  $\vec{x}$  der Punkt der  $xy$ -Ebene zugeordnet werden, der die gleiche  $x$ - und  $y$ -Koordinate hat wie  $\vec{x}$ . Die Abbildung  $\pi$ , die das erledigt, hat die Matrix

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} .$$

Natürlich bleibt jeder Punkt der  $xy$ -Ebene unter  $\pi$  fest. Jeder Bildpunkt liegt in der  $xy$ -Ebene, also kommt dasselbe heraus, wenn man  $\pi$  einmal anwendet oder zweimal. Diese Eigenschaft einer Projektion sieht unscheinbar aus, ist aber charakteristisch.

## 7 Definition

Es sei  $P$  eine quadratische Matrix mit der Eigenschaft  $P^2 = P$ . Dann heißt die zugehörige Abbildung  $\pi : \vec{x} \mapsto P\vec{x}$  eine Projektion des Raumes auf Bild  $\pi$  mit der Projektionsrichtung Kern  $\pi$ .

Dass die so definierte Projektion sich so verhält, wie wir es erwarten, zeigt der folgende Satz.

## 8 Satz

Es sei  $P$  eine  $n \times n$ -Matrix mit  $P^2 = P$ , und es sei  $\pi : \vec{x} \mapsto P\vec{x}$  die zugehörige Matrixabbildung. Dann gelten die folgenden Aussagen:

1. Für jedes  $\vec{y} \in \text{Bild } \pi$  ist  $P\vec{y} = \vec{y}$ .
2. Für jedes  $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$  ist  $P\vec{x} - \vec{x} \in \text{Kern } \pi$ .

**Beweis.** Es sei  $\vec{y} \in \text{Bild } \pi$ . Dann ist  $\vec{y} = P\vec{x}$  für einen Vektor  $\vec{x}$ , und es gilt

$$P\vec{y} = P(P\vec{x}) = P^2\vec{x} = P\vec{x} = \vec{y} ,$$

damit ist die erste Aussage des Satzes bewiesen. Die zweite Aussage folgt aus

$$P(P\vec{x} - \vec{x}) = PP\vec{x} - P\vec{x} = P\vec{x} - P\vec{x} = \vec{0} .$$

□

Projektionen, wie sie uns vertraut sind, erhalten wir für  $n = 3$ ,  $\dim \text{Bild } \pi = 2$  und  $\dim \text{Kern } \pi = 1$ .

## 5.2 Determinanten

Hinter diesem geheimnisvollen Namen verbirgt sich folgendes Konzept: Jeder quadratischen Matrix  $A$  wird eine Zahl  $\det(A)$  zugeordnet, und diese Zahl heißt die Determinante von  $A$ . Klar? Das ist kaum vorstellbar. Ich könnte nun eine abstrakte Theorie der Determinante hochfahren, aber das halte ich nicht für eine gute Idee. Statt dessen schreibe ich dir einige Eigenschaften der Determinante auf, die dir eine Vorstellung davon vermitteln, was die Determinante einer quadratischen Matrix ist, wie wir sie anwenden und wie wir ihren Wert berechnen können.

Es sei  $A$  eine  $n \times n$ -Matrix mit den Spaltenvektoren  $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n$ . Dann gelten die folgenden Aussagen.

1.  $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n$  ist genau dann linear unabhängig, wenn  $\det(A) \neq 0$  ist.
2. Das ( $n$ -dimensionale) Volumen des Parallelepipeds, das von  $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n$  aufgespannt wird, ist  $|\det(A)|$ .
3. Es ist  $\det(\vec{a}_1 + \sum_{k=2}^n r_k \vec{a}_k, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n) = \det(\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n)$  für alle  $r_2, \dots, r_n \in \mathbb{R}$ . In Worten: Der Wert der Determinante ändert sich nicht, wenn man zu einem Spaltenvektor der Matrix  $A$  eine beliebige Linearkombination der übrigen Spaltenvektoren addiert.
4. Die **transponierte Matrix**  $A^t$  von  $A$  erhält man, indem man die Matrix an der Hauptdiagonalen spiegelt. Genauer:  $A^t$  ist die Matrix  $B$  mit  $b_{i,j} = a_{j,i}$  für alle Indizes  $i, j$  mit  $1 \leq i, j \leq n$ . Für uns ist wichtig, dass

$$\det(A^t) = \det(A)$$

ist. Dies sieht man nicht so leicht ein, ebenso wie die folgende Aussage:

5. Vertauscht man zwei Spaltenvektoren der Matrix, ändert sich das Vorzeichen der Determinante.

6. Endlich etwas Konkretes: Es ist

$$\det \left( \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \right) = ad - bc \quad .$$

Insbesondere ist der Flächeninhalt des Parallelogramms, das von den Vektoren  $\begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix}$  und  $\begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix}$  aufgespannt wird, gleich  $ad - bc$ .

7. Eine Matrix  $A$ , bei der alle Einträge außerhalb der Hauptdiagonalen  $= 0$  sind (bei der also  $a_{i,j} = 0$  ist für alle  $i \neq j$ ), heißt **Diagonalmatrix**. Für eine Diagonalmatrix  $A$  ist

$$\det(A) = a_{1,1} a_{2,2} \cdots a_{n,n} \quad .$$

Insbesondere hat jede Einheitsmatrix die Determinante 1. Das ist nicht verwunderlich: Für  $n = 2$  spannen die Spaltenvektoren der Einheitsmatrix gerade das Einheitsquadrat auf, für  $n = 3$  den Einheitswürfel. Allgemein nennt man das von den Einheitsvektoren des  $\mathbb{R}^n$  aufgespannte Parallelepipid das Maßpolytop des Raumes. Sein Inhalt ist die Volumeneinheit des Raumes.

8. Matrizen, bei denen alle Einträge oberhalb der Hauptdiagonalen oder alle Einträge unterhalb der Hauptdiagonalen  $= 0$  sind, heißen **Dreiecksmatrizen**. Die Determinante einer Dreiecksmatrix ist das Produkt der Einträge auf der Hauptdiagonalen:

$$\det \left( \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & & 0 \\ a_{n1} & \cdots & & & a_{nn} \end{pmatrix} \right) = a_{11} a_{22} \cdots a_{nn}$$

9. Für quadratische Matrizen  $A, B$  gleicher Größe ist

$$\det(AB) = \det(A) \cdot \det(B) \quad .$$

Ich werde versuchen, euch diese Tatsache plausibel zu machen; streng beweisen werden wir sie nicht.

### 5.3 Eigenwerte und Eigenvektoren

Ich falle mal gleich mit der Tür ins Haus:

#### 9 Definition

Es sei  $A$  eine  $n \times n$ -Matrix. Ein Vektor  $\vec{0} \neq \vec{x} \in \mathbb{R}^n$  heißt **Eigenvektor** von  $A$  zum **Eigenwert**  $\lambda \in \mathbb{R}$ , wenn

$$A\vec{x} = \lambda\vec{x} \tag{13}$$

ist. Ein Eigenvektor von  $A$  zum Eigenwert 1 heißt **Fixvektor** von  $A$ .

Geometrisch gesprochen lässt die Abbildung  $\vec{x} \mapsto A\vec{x}$  jede von einem Eigenvektor erzeugte Gerade invariant.

**Beispiel.** Es sei

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad .$$

Wer erkennt, dass  $A$  die Matrix der Spiegelung des Raumes an der von  $\vec{e}_3$  und  $\vec{e}_1 + \vec{e}_2$  erzeugten Ebene des  $\mathbb{R}^3$  ist, kann sofort Eigenvektoren von  $A$  angeben: Zum Beispiel ist  $\vec{e}_1 + \vec{e}_2$  Fixvektor von  $A$  und  $\vec{e}_1 - \vec{e}_2$  Eigenvektor von  $A$  zum Eigenwert  $-1$ . Aber solche Informationen hat man nicht immer. Im allgemeinen Fall muss man systematisch nach Zahlen  $\lambda$  und Vektoren  $\vec{x}$  suchen,

für die Gleichung 13 gilt. Nun, bringt man das  $\lambda\vec{x}$  von der rechten auf die linken Seite, beachtet  $\vec{x} = E\vec{x}$  für die Einheitsmatrix  $E$  und klammert  $\vec{x}$  aus, erhält man

$$(A - \lambda E)\vec{x} = \vec{0} . \quad (14)$$

Dies ist ein homogenes LGS mit der Koeffizientenmatrix  $A - \lambda E$ . Eigenvektoren zum Eigenwert  $\lambda$  gibt es, wenn dieses Gleichungssystem nicht nur die triviale Lösung  $\vec{x} = \vec{0}$  hat. Dies ist genau dann der Fall, wenn die Spaltenvektoren der Koeffizientenmatrix linear abhängig sind, also wenn

$$\det(A - \lambda E) = 0 \quad (15)$$

ist.

Das Berechnen von Determinanten von Matrizen, deren Einträge Variable enthalten, ist eine ausgesprochen heikle Angelegenheit; wir haben ein Beispiel durchgerechnet. Hier bemühe ich jetzt den Rechner und erhalte

$$\det(A - \lambda E) = \det \left( \begin{pmatrix} -\lambda & 1 & 0 \\ 1 & -\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1 - \lambda \end{pmatrix} \right) = -\lambda^3 + \lambda^2 + \lambda - 1 .$$

Dieses Polynom in  $\lambda$  heißt **charakteristisches Polynom** der Matrix  $A$ , und die Eigenwerte von  $A$  sind gerade die Nullstellen des charakteristischen Polynoms.

Das Berechnen der Nullstellen von Polynomen ist im allgemeinen auch keine Kleinigkeit. Hier kommt man mit den Mitteln aus der 11 durch: Eine Nullstelle raten, mit Hilfe von Polynomdivision den zugehörigen Linearfaktor abspalten, auf den Quotienten die  $pq$ -Formel anwenden. Wir erhalten die Eigenwerte 1 und 1 und  $-1$ . Jetzt setzt man  $\lambda = 1$  in das Gleichungssystem in Gleichung 14 ein und löst es. Die Lösungsmenge ist  $\langle \vec{e}_1 + \vec{e}_2, \vec{e}_3 \rangle$ . Für den Eigenwert  $\lambda = -1$  erhalten wir entsprechend als Lösungsmenge  $\langle \vec{e}_1 - \vec{e}_2 \rangle$ .

## 10 Bemerkung

Die Eigenvektoren von  $A$  zum Eigenwert  $\lambda$  bilden, nimmt man den Nullvektor hinzu, gerade den Kern der Abbildung  $\vec{x} \mapsto (A - \lambda E)\vec{x}$ , also eine Menge, die sich als Erzeugnis schreiben lässt, geometrisch eine Gerade durch den Nullpunkt, eine Ebene durch den Nullpunkt, und so weiter. Man nennt die Menge der Eigenvektoren von  $A$  zum Eigenwert  $\lambda$  deshalb auch den Eigenraum von  $\lambda$ .

## 5.4 Technisches zu Matrizen

Du hast schon Beispiele für stochastische Matrizen gesehen. Wir benötigen einige Kenntnisse über Matrizen, damit wir Aussagen über das Verhalten stochastischer Matrizen machen zu können; diese Kenntnisse werden hier entwickelt. Die Nachweise sind ziemlich technisch; wenn du an dem Stoff kein Interesse hast, reicht es aus, wenn du die zentralen Ergebnisse zur Kenntnis nimmst: das sind die Sätze 12, 13 und 14.

Es sei  $A$  eine  $n \times m$ -Matrix und  $B$  eine  $m \times l$ -Matrix. Du weißt, wie du die Einträge der  $n \times l$ -Matrix  $C = AB$  berechnest. Wenn nun die Einträge von  $A$  und von  $B$  kleine Zahlen sind, können die von  $C$  nicht riesengroß werden; das kannst du leicht nachvollziehen. Wir wollen uns das einmal etwas genauer anschauen.

Eine Zeile von  $A$  hat die Form  $(a_1, a_2, \dots, a_m)$ , eine Spalte von  $B$  die Form  $\vec{b} = (b_1, b_2, \dots, b_m)^t$ . Die Zeile von  $A$  und die Spalte von  $B$  liefern den Eintrag

$$c = \sum_{k=1}^m a_k b_k \quad (16)$$

von  $C$ . Wir fragen uns nun, was wir über dieses  $c$  sagen können.

Zunächst machen wir keine Annahmen über die  $a_k, b_k$  und schlagen mit dem Holzhammer zu. Es ist jedenfalls

$$|c| = \left| \sum_{k=1}^m a_k b_k \right| \leq \sum_{k=1}^m |a_k| \cdot |b_k| \leq \left( \sum_{k=1}^m |a_k| \right) \cdot \max\{|b_1|, |b_2|, \dots, |b_m|\} . \quad (17)$$

Wir halten dieses Ergebnis fest:

### 11 Lemma

Der Eintrag  $c$  aus Gleichung 16 ist betragsmäßig höchstens so groß wie das Produkt aus der Summe der Beträge der Zeile der Matrix  $A$  und dem Betrag des (betragsmäßig) größten Eintrages von  $\vec{b}$ , wie es in Gleichung 17 notiert ist.

Es sei nun  $\vec{b}$  stochastischer Vektor, also alle Einträge  $b_k \geq 0$  und die Summe der  $b_k$  gleich 1. Wir gehen ferner davon aus, dass alle  $a_k \geq 0$  sind, und wir setzen  $s := \min\{a_1, a_2, \dots, a_m\}$  und  $S := \max\{a_1, a_2, \dots, a_m\}$ . Dann erhalten wir die folgenden Abschätzungen für das  $c$ :

$$c = \sum_{k=1}^m a_k b_k \quad \left\{ \begin{array}{l} \leq \sum_{k=1}^m S b_k = S \sum_{k=1}^m b_k = S \\ \geq \sum_{k=1}^m s b_k = s \sum_{k=1}^m b_k = s \end{array} \right. , \quad (18)$$

es ist also dann

$$s := \min\{a_1, a_2, \dots, a_m\} \leq c \leq \max\{a_1, a_2, \dots, a_m\} =: S . \quad (19)$$

Daraus schließen wir sofort die erste Aussage des folgenden Satzes.

### 12 Satz

Es seien  $A$  und  $B$  stochastische  $m \times m$ -Matrizen und  $C = AB$ , und es sei  $s$  bzw.  $S$  der kleinste Eintrag der  $i$ -ten Zeile von  $A$ . Dann gilt für den kleinsten Eintrag  $s'$  und den größten Eintrag  $S'$  der  $i$ -ten Zeile von  $C$

$$s \leq s' \leq S' \leq S .$$

Falls der kleinste Eintrag von  $B$  eine positive Zahl  $d > 0$  ist, gilt sogar

$$S' - s \leq (S - s) \cdot (1 - 2d) .$$

In diesem Fall strebt folglich  $AB^l$  für  $l \rightarrow \infty$  gegen eine Grenzmatrix, deren Spaltenvektoren alle gleich sind.

Einen Beweis der Aussagen des zweiten Teils des Satzes hast du im Unterricht gesehen; du brauchst die da durchgeführten Abschätzungen nicht reproduzieren zu können.

Es sei nun  $\vec{b}$  Eigenvektor der Matrix  $A$  zum Eigenwert  $\lambda$ . Wenn  $(a_1, a_2, \dots, a_m)$  die  $k$ -te Zeile von  $A$  ist, gilt

$$c = \lambda b_k ,$$

also

$$|\lambda b_k| \leq \left( \sum_{k=1}^m |a_k| \right) \cdot \max\{|b_1|, |b_2|, \dots, |b_m|\} .$$

Wir können nun die Zeile von  $A$  so wählen, dass das  $b_k$  betragsmäßig größter Eintrag von  $\vec{b}$  ist. Dann erhalten wir

$$|\lambda b_k| \leq \left( \sum_{k=1}^m |a_k| \right) |b_k| ,$$

und da dieses  $b_k$  sicher  $\neq 0$  ist, gilt der folgende Satz:

### 13 Satz

Jeder Eigenwert einer quadratischen Matrix  $A$  ist betragsmäßig höchstens so groß wie das Maximum der Zeilensummen der Beträge der Einträge von  $A$ :

$$|\lambda| \leq \max\left\{\sum_{k=1}^m |a_{jk}| \mid j = 1, 2, \dots, m\right\}$$

In stochastischen Matrizen sind nicht die Zeilensummen = 1, sondern die Spaltensummen, aber da  $A$  und  $A^t$  die gleichen Eigenwerte haben, gilt der für uns wichtige Satz:

### 14 Satz

Jeder Eigenwert einer stochastischen Matrix ist betragsmäßig  $\leq 1$ .

## 6 Stochastische Matrizen

### 6.1 Das Wetterbeispiel zur Einführung

Recht typisch ist das Wetterbeispiel aus unserem Buch.<sup>7</sup> Es werden drei Sorten Wetter unterschieden: 1, 2 und 3, und es ist eine sogenannte Übergangsmatrix

$$A = \begin{pmatrix} 0.5 & 0.3 & 0.2 \\ 0.3 & 0.5 & 0.3 \\ 0.2 & 0.2 & 0.5 \end{pmatrix}$$

gegeben. In der  $j$ -ten Spalte stehen die Wahrscheinlichkeiten  $a_{ij}$ , dass das Wetter am folgenden Tag im Zustand  $i$  ist, wenn es heute im Zustand  $j$  ist. Natürlich ist die Summe dieser Wahrscheinlichkeiten = 1, und eben dies ist das Kennzeichen einer stochastischen Matrix:

### 15 Definition

Eine Matrix heißt stochastisch, wenn alle ihre Einträge  $\geq 0$  sind und die Summe der Einträge einer jeden Spalte = 1 ist.

Wenn das Wetter heute im Zustand 1 ist, stehen in der ersten Spalte  $A\vec{e}_1$  von  $A$  die Wahrscheinlichkeiten, dass das Wetter morgen im Zustand 1 bzw. 2 bzw. 3 ist. Mit Hilfe eines Baumdiagramms machten wir uns klar, dass die Wahrscheinlichkeiten für das Wetter übermorgen im Vektor

$$A(A\vec{e}_1) = A^2\vec{e}_1$$

stehen. Wir können auch  $\vec{e}_1$  selbst als so einen stochastischen Vektor auffassen, das vereinheitlicht die Sache, und dann können wir allgemein sagen: Wenn die Wahrscheinlichkeit dafür, dass das Wetter an einem Tag im Zustand  $i$  ist, durch den Eintrag  $b_i$  eines (dann notwendig stochastischen) Vektors  $\vec{b}$  gegeben ist, dann stehen die Wahrscheinlichkeiten für das Wetter am folgenden Tag in  $A\vec{b}$  und für den  $n$ -ten folgenden Tag in  $A^n\vec{b}$ .

Wenn wir danach fragen, wie das Wetter in einhundert Tagen sein wird, hilft es uns wenig zu wissen, wie das Wetter heute ist. Wenn das Wetter heute im Zustand 1 ist, stehen die Wahrscheinlichkeiten für das Wetter in einhundert Tagen in der ersten Spalte von  $A^{100}$ . Ist das Wetter heute im Zustand 2, stehen die Wahrscheinlichkeiten für das Wetter in einhundert Tagen entsprechend in der zweiten Spalte von  $A^{100}$ . Die Spalten sollten sich folglich kaum noch unterscheiden! In der Tat haben wir gefunden, dass sich schon die Spaltenvektoren von  $A^{10}$  nur noch sehr wenig unterscheiden.

So kommt man zu der Vermutung, dass  $A^n$  für  $n \rightarrow \infty$  gegen eine Grenzmatrix  $G = (\vec{g}, \vec{g}, \vec{g})$  strebt. Schon für Grenzwerte von Folgen und Funktionen haben wir keine saubere Begrifflichkeit,

---

<sup>7</sup>Artmann/Törner Seite 39

geschweige denn eine Theorie; nun reden wir unbekümmert über Grenzwerte von Matrizen... Aber gut: Nehmen wir an,  $A^n$  strebt gegen eine Grenzmatrix  $G$  für  $n \rightarrow \infty$ . Dann strebt auch  $A^{n+1} = AA^n$  gegen  $G$ . Aber  $AA^n$  sollte gegen  $AG$  streben. Das geht alles nur, wenn

$$AG = G \tag{20}$$

ist, die Spaltenvektoren von  $G$  also Fixvektoren von  $A$  sind.

Wir halten das Ergebnis dieser Überlegung in einem Satz fest (den wir freilich nicht streng bewiesen haben).

### 16 Satz

*Es sei  $A$  eine quadratische Matrix. Wenn  $A^n$  für  $n \rightarrow \infty$  gegen eine Grenzmatrix  $G$  strebt, muss  $AG = G$  gelten. Die Spaltenvektoren von  $G$  müssen folglich Fixvektoren von  $A$  sein.*

Wir haben die Fixvektoren von  $A$  berechnet; sie bilden, wenn man  $\vec{0}$  hinzunimmt, eine Gerade, und auf dieser Geraden gibt es genau einen stochastischen Fixvektor, nämlich

$$\vec{g} = \frac{1}{56} \begin{pmatrix} 19 \\ 21 \\ 16 \end{pmatrix},$$

und  $G$  muss eine stochastische Matrix sein, denn jedes  $A^n$  ist stochastisch. Folglich gibt es nur einen Kandidaten für eine Grenzmatrix von  $A^n$  für  $n \rightarrow \infty$ .

Wir haben uns noch überlegt, dass der Eintrag  $g_i$  von  $\vec{g}$  die Wahrscheinlichkeit sein sollte, dass das Wetter an einem zufällig gewählten Tag im Zustand  $i$  ist.

## 6.2 Genauere Untersuchung des Wetterbeispiels

Schauen wir uns das Wetterbeispiel noch einmal an: Wir haben es mit einem System zu tun, das eine Reihe von Zuständen annehmen kann, hier die Zustände 1, 2 oder 3. Die Wahrscheinlichkeit  $a_{ij}$ , dass sich das System, das sich jetzt im Zustand  $j$  befindet, beim nächsten beobachteten Zeitpunkt im Zustand  $i$  ist, hängt ausschließlich von  $j$  und  $i$  ab, also nicht davon, in welchen Zuständen es vor her war. Und diese Wahrscheinlichkeit  $a_{ij}$  ist auch fest, sie darf sich nicht mit der Zeit ändern. Also steckt die ganze Information über das System in der Matrix  $A = (a_{ij})$  der Übergangswahrscheinlichkeiten.

Das sind sehr harte Voraussetzungen, die in realen Beispielen kaum streng erfüllt sein werden. Dennoch lässt sich die auf der Grundlage dieser Voraussetzungen entwickelte Theorie der „homogenen Markow-Ketten“ vielfältig anwenden.

Zum einen fragt man danach, mit welcher Wahrscheinlichkeit das System nach  $n$  Schritten im Zustand  $i$  sein wird, wenn es jetzt im Zustand  $j$  ist – diese Wahrscheinlichkeit ist der  $ij$ -Eintrag der Matrix  $A^n$ . Zum anderen interessiert man sich für das Verhalten des Systems auf lange Sicht, also dafür, ob  $A^n$  für  $n \rightarrow \infty$  gegen eine Grenzmatrix  $G$  strebt.

Eine notwendige Bedingung für die Existenz einer Grenzmatrix liefert der Satz 16: die Spaltenvektoren einer Grenzmatrix müssen Fixvektoren von  $A$  sein. Eine hinreichende Bedingung steht in Satz 12 auf Seite 22. Alle Einträge der Matrix  $A$  des Wetterbeispiels sind positiv, damit ist die Existenz einer Grenzmatrix garantiert. Da die angegebene Matrix  $G$  der einzige Kandidat für eine Grenzmatrix ist, ist das Problem vollständig gelöst:  $A^n$  strebt für  $n \rightarrow \infty$  gegen die angegebene Matrix  $G$ . Im wesentlichen ist damit umrissen, was man von dir erwartet: du sollst zu einem System die Übergangsmatrix  $A$  und/oder einen Übergangsgraphen erstellen, eventuell Potenzen von  $A$  berechnen, das Verhalten von  $A^n$  für  $n \rightarrow \infty$  untersuchen und die Ergebnisse in die Anwendungssituation zurückübersetzen.



### 6.3 Der Einfluss der Eigenwerte von $A$ auf $A^n$

Dieser Aspekt wird wohl kaum zum dem gehören, was du beim schriftlichen Abitur wissen musst, ich finde ihn aber sehr interessant.

Die Eigenwerte der Matrix  $A$  des Wetterbeispiels können wir im Prinzip per Hand ausrechnen<sup>8</sup>, es sind  $\frac{1}{5}$ ,  $\frac{3}{10}$  und 1. Dann gibt zu diesen Eigenwerten Eigenvektoren  $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3$ , und da sie zu paarweise verschiedenen Eigenwerten gehören, sind sie linear unabhängig. Jeden Vektor  $\vec{x} \in \mathbb{R}^3$  können wir als Linearkombination der  $\vec{v}_j$  schreiben:

$$\vec{x} = r_1 \vec{v}_1 + r_2 \vec{v}_2 + r_3 \vec{v}_3$$

Dann ist

$$A^n \vec{x} = A^n (r_1 \vec{v}_1 + r_2 \vec{v}_2 + r_3 \vec{v}_3) = r_1 \left(\frac{1}{5}\right)^n \vec{v}_1 + r_2 \left(\frac{3}{10}\right)^n \vec{v}_2 + r_3 \vec{v}_3 \xrightarrow{n \rightarrow \infty} r_3 \vec{v}_3 .$$

Für jedes  $\vec{x} \in \mathbb{R}^3$  strebt also  $A^n \vec{x}$  gegen die Projektion von  $\vec{x}$  auf  $\langle \vec{v}_3 \rangle$  mit Projektionsrichtung  $\langle \vec{v}_1, \vec{v}_2 \rangle$ .

### 6.4 Absorbierende Zustände

Wir hatten wiederholt das Beispiel des betrunkenen Seemanns, dessen Heimweg über die Sperrmauer einer Talsperre führt. Links gähnt der Abgrund, rechts der Stausee, und auf der Sperrmauer hatten wir die Zustände „links“, „rechts“ und „mittig“ unterschieden. Fällt der Seemann in den Abgrund, kommt er nicht wieder heraus; dieser Zustand kann nicht wieder verlassen werden, wenn er einmal betreten ist. Ein solcher Zustand heißt **absorbierend**. Wir machen auch den Zustand „Stausee“ absorbierend, indem wir annehmen, dass der Seemann nicht schwimmen kann, oder indem wir Piranyas im Stausee ansiedeln. Wie üblich versehen wir die Zustände mit Nummern. Dabei kommen die absorbierenden Zustände zuerst: Abgrund, Stausee, links, mittig, rechts. Die Übergangsmatrix  $M$  könnte so aussehen:

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{6} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{6} & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{6} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \quad (21)$$

Wir haben uns dabei vorgestellt, dass der Seemann wegen Wind tendenziell eher nach links als nach rechts vom geraden Wege abkommt.

Du hast die Aspekte unseres (diskreten!) Modells noch genau im Kopf, nicht? Wir schauen alle zehn Sekunden nach dem Seemann. Sehen wir ihn jetzt im Zustand  $i$ , ist die Wahrscheinlichkeit, dass wir ihn beim nächsten Hinschauen im Zustand  $j$  sehen werden, durch  $m_{ji}$  gegeben, also durch den Eintrag der Matrix in der Spalte  $j$  und der Zeile  $i$ . Und wenn wir ihn jetzt im Zustand  $i$  sehen, ist die Wahrscheinlichkeit, dass wir ihn in  $n$ -mal zehn Sekunden im Zustand  $j$  sehen werden, durch den entsprechenden Eintrag  $m_{ji}^{(n)}$  von  $M^n$  gegeben. Diesen Wert könnten wir ohne Matrizen nur mit Hilfe eines gewaltigen Baumdiagramms bekommen.

Wir interessieren uns dafür, was auf lange Sicht aus dem Seemann wird, also für das Verhalten von  $M^n$  für  $n \rightarrow \infty$ . Mit den alten Mitteln kommen wir da nicht weiter, es gibt viel zu viele stochastische Fixvektoren. Hier braucht man neue Ideen: Als erstes teilt man die Matrix  $M$  in Untermatrizen ein und schreibt

$$M = \begin{pmatrix} E & B \\ O & Q \end{pmatrix} .$$

---

<sup>8</sup>Um Eigenwerte zu berechnen, nimmt man am besten den Computer. Siehe `wetter.mn`

Dabei ist bei unserem Beispiel

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{6} \end{pmatrix}, \quad O = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad Q = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & 0 \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ 0 & \frac{1}{6} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Der Nutzen besteht darin, dass man die Potenzen von  $M$  sinnvoll mit Hilfe dieser Teilmatrizen schreiben kann, und zwar in der folgenden Weise.

### 17 Lemma

Es seien  $M$  und  $M'$  beides  $m \times m$ -Matrizen, und es sei  $1 < r < m$ . Wir zerlegen  $M$  und  $M'$  in Teilmatrizen:

$$M = \begin{pmatrix} E & B \\ O & Q \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad M' = \begin{pmatrix} E' & B' \\ O' & Q' \end{pmatrix},$$

und dabei seien  $E$  und  $E'$   $r \times r$ -Matrizen und  $Q$  und  $Q'$   $(m-r) \times (m-r)$ -Matrizen. Zwangsläufig haben dann  $O$  und  $O'$  die Größe  $(m-r) \times r$  und  $B$  und  $B'$  die Größe  $r \times (m-r)$ , und es gilt

$$MM' = \begin{pmatrix} EE' + BO' & EB' + BQ' \\ EB' + BQ & OB' + QQ' \end{pmatrix}.$$

Man beweist das Lemma durch genaues Hinschauen. Wir bedenken nun, dass bei uns  $O$  eine Nullmatrix und  $E$  eine Einheitsmatrix ist, und wir erhalten dann für die Potenzen von  $M$  die folgenden Ausdrücke:

$$\begin{aligned} M^2 &= \begin{pmatrix} E & B + BQ \\ O & Q^2 \end{pmatrix} \\ M^3 &= M^2M = \begin{pmatrix} E & B + BQ + BQ^2 \\ O & Q^3 \end{pmatrix} \\ &\vdots \\ M^n &= \begin{pmatrix} E & B + BQ + BQ^2 + BQ^3 + \dots + BQ^{n-1} \\ O & Q^n \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Wenn wir oben rechts  $B$  ausklammern, erhalten wir, wenn wir unter  $Q^0$  die Einheitsmatrix in der Größe von  $Q$  verstehen,

$$M^n = \begin{pmatrix} E & B \sum_{k=0}^{n-1} Q^k \\ O & Q^n \end{pmatrix}.$$

Wir sind auf gutem Wege, und es ist nicht mehr weit: Die Matrix  $\sum_{k=0}^{n-1} Q^k$  ist eine geometrische Reihe, und wenn man sie behandelt wie eine gewöhnliche geometrische Reihe, wird man mit ihr fertig: Die Einheitsmatrix in der Größe von  $Q$  bezeichnen wir mit  $E'$ . Dann ist

$$(E' - Q) \sum_{k=0}^{n-1} Q^k = (E' + Q + Q^2 + \dots + Q^{n-1}) - (Q + Q^2 + Q^3 + \dots + Q^n) = E' - Q^n.$$

Daraus ergibt sich das folgende Lemma.

### 18 Lemma

Es sei  $Q$  eine quadratische Matrix und  $E'$  die dazu passende Einheitsmatrix, und für  $n \rightarrow \infty$  strebe  $Q^n$  gegen die Nullmatrix. Dann ist

$$(E' - Q) \sum_{k=0}^{\infty} Q^k = E'.$$

Wir haben uns überlegt, dass  $Q^n$  jedenfalls gegen die Nullmatrix strebt, wenn jede Spaltensumme von  $Q$  kleiner als 1 ist. Es reicht sogar aus, dass jede Spaltensumme von  $Q^k$  für irgendein  $k$  kleiner als 1 ist.

Ich fasse das, was wir nun wissen, in einem Satz zusammen, damit ihr es bei Beispielen bequem anwenden könnt.

**19 Satz**

Die stochastische Übergangsmatrix  $M$  gestatte eine Zerlegung

$$M = \begin{pmatrix} E & B \\ O & Q \end{pmatrix}$$

mit quadratischen Matrizen  $E$  und  $Q$ , wobei  $E$  eine Einheitsmatrix ist und  $O$  eine Nullmatrix ist. Ferner sei für ein geeignetes  $k$  jede Spaltensumme von  $Q^k$  kleiner als 1. Dann gilt

$$M^n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \begin{pmatrix} E & B(E' - Q)^{-1} \\ O & O' \end{pmatrix} .$$

Dabei bedeutet  $E'$  die Einheitsmatrix und  $O'$  die Nullmatrix in der Größe von  $Q$ .

Bei unserem Beispiel ergibt sich<sup>9</sup>

$$B(E' - Q)^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{14}{15} & \frac{4}{5} & \frac{8}{15} \\ \frac{1}{15} & \frac{1}{5} & \frac{1}{15} \end{pmatrix} ,$$

und das bedeutet Folgendes: Startet unser Seemann im Zustand „links“, endet er mit der Wahrscheinlichkeit  $\frac{14}{15}$  im Abgrund und mit der Wahrscheinlichkeit  $\frac{1}{15}$  im Stausee.

**6.5 Aussagen über die Laufzeit des Prozesses**

Bleiben wir bei unserem Beispiel des angetrunkenen Seemannes aus dem vorigen Kapitel, und gehen wir davon aus, dass der Seemann jetzt im Zustand 5 ist. Wenn du dich daran erinnerst, wie wir den Erwartungswert  $np$  einer binomialverteilten Zufallsgröße bekommen haben, wird dir die folgende Konstruktion plausibel sein: Wir definieren für  $k = 1, 2, 3, \dots$  Zufallsgrößen  $X_k$  durch

$$X_k = \begin{cases} 1 & \text{falls sich der Seemann nach } k \text{ Takten im Zustand 3 befindet,} \\ 0 & \text{falls er nach } k \text{ Takten in einem anderen Zustand ist.} \end{cases}$$

Dann ist der Erwartungswert  $E(X_k)$  gegeben durch

$$E(X_k) = 1 \cdot P(X_k = 1) + 0 \cdot P(X_k = 0) = P(X_k = 1) ,$$

und das ist nichts anderes als der Eintrag  $m_{5,3}^{(k)} = q_{1,3}^{(k)}$  von  $M^k$  bzw. von  $Q^k$ . Nun, der Erwartungswert sagt, welchen Wert die Zufallsgröße im Mittel je Durchführung annimmt, wenn man den Versuch sehr oft laufen lässt. Wollen wir wissen, wie oft ein Seemann bei seiner Reise (bei Start in 5) überhaupt im Zustand 3 ist, müssen wir

$$\sum_{k=1}^{\infty} X_k$$

bilden, und der Erwartungswert dieser Zufallsgröße ist

$$E \left( \sum_{k=1}^{\infty} X_k \right) = \sum_{k=1}^{\infty} E(X_k) = \sum_{k=1}^{\infty} q_{1,3}^{(k)} ,$$

---

<sup>9</sup>Zur Rechnung siehe seemann.mn

und dies ist nichts anderes als der 1, 3–Eintrag von

$$\sum_{k=1}^{\infty} Q^k .$$

Nun wissen wir, dass

$$\sum_{k=0}^{\infty} Q^k = (E' - Q)^{-1}$$

ist. Da  $Q^0 = E'$  ist, ist es auf der Position 1, 3 egal, ob wir die Summe bei  $k = 0$  oder bei  $k = 1$  beginnen lassen. Wir können sagen, dass sich der Seemann bei Start in Position 5 im Laufe seiner Reise im Mittel so oft in Position 3 aufhalten wird, wie der (1, 3)–Eintrag von  $(E' - Q)^{-1}$  angibt. Die mittlere Anzahl der Aufenthalte in Position 4 bei Start in 5 ist entsprechend durch den (2, 3)–Eintrag von  $(E' - Q)^{-1}$  gegeben. Nur im (3, 3)–Eintrag von  $(E' - Q)^{-1}$  steckt als Beitrag von  $Q^0$  eine 1. Wenn man als mittlere Anzahl der Aufenthalte in 5 bei Start in 5 einfach den (3, 3)–Eintrag von  $(E' - Q)^{-1}$  nimmt, zählt man den Aufenthalt beim Start mit.

Wie viele Takte dauert es denn nun, bis das System in einen absorbierenden Zustand gelangt? Wir wissen, wie oft das System im Mittel in einem nicht–absorbierenden Zustand ist. Es muss aber noch aus dem letzten nicht–absorbierenden Zustand in den absorbierenden Zustand wechseln, wir müssen noch 1 zur mittleren Anzahl der Aufenthalte in nicht–absorbierenden Zuständen addieren. Das gleicht die  $-1$  beim Zustand in der Hauptdiagonalen aus. Unter dem Strich ist die mittlere Dauer der Reise insgesamt einfach die Summe der Einträge der entsprechenden Spalte von  $(E' - Q)^{-1}$ !

Wir halten das Ergebnis in dem folgenden Satz fest, er ermöglicht interessante Aussagen über Anwendungen.

## 20 Satz

*Die Voraussetzungen und Bezeichnungen seien wie in Satz 19. Der Prozess starte in einem Zustand, der nicht absorbierend ist. Die Zahl der Takte, die es im Mittel dauert, bis ein absorbierender Zustand angenommen wird, ist dann gegeben durch die Summe der Elemente von  $(E' - Q)^{-1}$  in der Spalte, die zum Startzustand gehört.*

In unserem Beispiel ist

$$(E' - Q)^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{14}{5} & \frac{12}{5} & \frac{8}{5} \\ \frac{6}{5} & \frac{18}{5} & \frac{12}{5} \\ \frac{2}{5} & \frac{6}{5} & \frac{14}{5} \end{pmatrix} .$$

Wenn der Seemann im Zustand 5 startet, dauert es im Mittel

$$\frac{8}{5} + \frac{12}{5} + \frac{14}{5} = \frac{34}{5}$$

Takte, bis er in einen absorbierenden Zustand gerät. Startet er in 4, sind es im Mittel  $\frac{36}{5}$  Takte, startet er in 3, sind es im Mittel  $\frac{22}{5}$  Takte.

## 6.6 Alternative Berechnung der mittleren Prozesslaufzeit

Es gibt noch eine andere Methode, die mittlere Laufzeit des Prozesses auszurechnen. Sie erfordert weniger Theorie, setzt aber voraus, dass das Problem eine Lösung hat.<sup>10</sup>

Ich demonstriere die Methode am Beispiel unseres Seemannes, die Daten findest du auf Seite 25. Nehmen wir an, es dauere im Mittel  $n_1$  Schritte, bis der Seemann vom Zustand „links“ aus in einen absorbierenden Zustand gelangt; vom Zustand „mittig“ aus dauere es im Mittel  $n_2$  Schritte,

<sup>10</sup>Nicht jedem von euch leuchtete ein, dass das eine Einschränkung ist; für den Fachmann steht das aber außer Zweifel.

vom Zustand „rechts“ aus im Mittel  $n_3$  Schritte. Vom Zustand „links“ aus kann er gleich in einen absorbierenden Zustand gelangen, die Wahrscheinlichkeit dafür ist  $m_{13} = \frac{1}{3}$ . Mit der Wahrscheinlichkeit  $m_{33} = \frac{1}{2}$  bleibt er im Zustand „links“ und braucht anschließend im Mittel weitere  $n_1$  Schritte bis zu einem absorbierenden Zustand. Mit der Wahrscheinlichkeit  $m_{43} = \frac{1}{6}$  wechselt er in den Zustand „mittig“, und von dort braucht er im Mittel weitere  $n_2$  Schritte, bis er in einen absorbierenden Zustand gelangt. Wir erhalten die folgende Gleichung:

$$n_1 = \frac{1}{3} \cdot 1 + \frac{1}{2}(n_1 + 1) + \frac{1}{6}(n_2 + 1) \quad (22)$$

Entsprechende Gleichungen können wir für  $n_2$  und für  $n_3$  hinschreiben:

$$n_2 = \frac{1}{3}(n_1 + 1) + \frac{1}{2}(n_2 + 1) + \frac{1}{6}(n_3 + 1) \quad (23)$$

$$n_3 = \frac{1}{6} \cdot 1 + \frac{1}{3}(n_2 + 1) + \frac{1}{2}(n_3 + 1) \quad (24)$$

Dies ist ein lineares Gleichungssystem für  $n_1, n_2, n_3$ . Wenn wir es lösen, erhalten wir wieder die im vorigen Abschnitt berechneten mittleren Laufzeiten.<sup>11</sup>

## 6.7 Stochastische Matrizen und konvexe Mengen

Wir haben uns kurz mit konvexen Mengen befasst, weil sie uns helfen sollten, die Wirkung stochastischer Matrizen besser zu verstehen. Hier gebe ich einen kurzen Abriss dessen, was Philipp vorgetragen hat.

Der Begriff „konvex“ ist dir sicher schon begegnet, er bezeichnet eine Eigenschaft von Punkt-mengen. Die linke Punktmenge in Abbildung 4 ist konvex, die rechte nicht. Definieren wir den

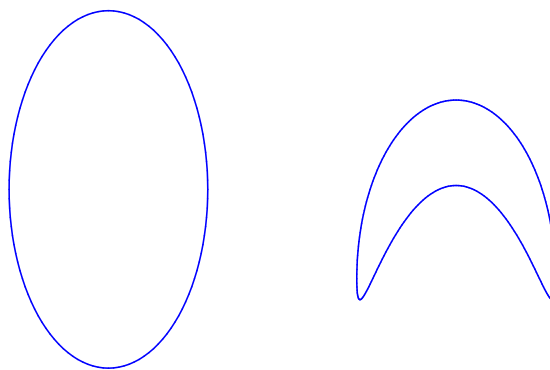


Abbildung 4: Eine konvexe (links) und eine nicht-konvexe Punktmenge

Begriff vernünftig:

### 21 Definition

Eine Menge  $M \subseteq \mathbb{R}^n$  heißt **konvex**, wenn für je zwei Punkte  $A, B \in M$  auch die Verbindungsstrecke in  $M$  liegt:

$$\overline{AB} \subseteq M \quad \text{für alle } A, B \in M$$

Wenn eine Menge  $M$  selbst nicht konvex ist, kann man so Punkte hinzunehmen, dass sich eine konvexe Menge ergibt. Wenn man nur die Punkte hinzunimmt, die unbedingt nötig sind, nennt man das Ergebnis die **konvexe Hülle** von  $M$  und verwendet dafür das Symbol  $\text{conv } M$ . Die konvexe Hülle von  $M$  ist die kleinste konvexe Menge, die  $M$  enthält.

<sup>11</sup>siehe seemann.mn

Du kannst dir endliche Punktmen­gen in der Ebene und im Raum vorstellen und dir überlegen, wie die konvexe Hülle dazu aussieht. Wenn du versuchst, dir ein Computerprogramm auszudenken, das die konvexe Hülle zu einer gegebenen Punktmenge konstruiert, wirst du merken, dass das nicht so einfach ist. Erstaunlicherweise kann man für die konvexe Hülle einer endlichen Punktmenge eine explizite rechnerische Darstellung geben:

**22 Lemma**

Für  $M = \{\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_m\} \subset \mathbb{R}^n$  ist die konvexe Hülle

$$\text{conv } M = \left\{ \sum_{k=1}^m r_k \vec{x}_k \mid r_1, r_2, \dots, r_m \in \mathbb{R}, r_1, r_2, \dots, r_m \geq 0, \sum_{k=1}^m r_k = 1 \right\} .$$

Das heißt, die konvexe Hülle  $\text{conv } M$  besteht aus allen Linearkombinationen der  $\vec{x}_k$  mit nicht-negativen Vorfaktoren, deren Summe = 1 ist.

Mit einem formalen Beweis des Lemmas halten wir uns nicht auf; wir brauchen es nur für zwei- und dreielementige Mengen, und man kann sich klarmachen, dass dann die Verbindungsstrecke der Punkte beziehungsweise die Menge der Punkte des Dreiecks herauskommt. Wenn  $r_1, r_2 \geq 0$  und  $r_1 + r_2 = 1$  sein soll, kann ich  $r_1 \in [0; 1]$  beliebig wählen;  $r_2$  ist dann notwendig  $r_2 = 1 - r_1$ . Es folgt

$$r_1 \vec{x}_1 + r_2 \vec{x}_2 = r_1 \vec{x}_1 + (1 - r_1) \vec{x}_2 = \vec{x}_2 + r_1 (\vec{x}_1 - \vec{x}_2) \quad \text{mit } 0 \leq r_1 \leq 1,$$

und die Sache ist klar.

Vielleicht ist es dir gleich aufgefallen: alle  $r_k \geq 0$  und  $\sum_{k=1}^m r_k = 1$ , diese Eigenschaft kennen wir von den Einträgen stochastischer Vektoren. Wir können sofort ein Lemma formulieren:

**23 Lemma**

Es sei  $A$  eine Matrix mit den Spaltenvektoren  $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_m$  und es sei  $\vec{x} \in \mathbb{R}^m$  ein stochastischer Vektor. Dann liegt  $A\vec{x}$  in der konvexen Hülle der Spaltenvektoren von  $A$ :

$$A\vec{x} \in \text{conv}\{\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_m\} .$$

Die stochastischen Vektoren des  $\mathbb{R}^3$  bilden das Dreieck mit den Eckpunkten  $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ , und die Spaltenvektoren einer stochastischen  $3 \times 3$ -Matrix  $A$  gehören zu drei Punkten dieses Dreiecks. Die Matrixabbildung  $\vec{x} \mapsto A\vec{x}$  bildet die Menge  $\text{conv}\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$  aller stochastischen Vektoren auf dieses Dreieck  $\text{conv}\{\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3\}$  ab. Die Spaltenvektoren von  $A^2, A^3$ , und so weiter gehören wiederum zu Eckpunkten von Dreiecken. Jedes ist im vorigen enthalten. Im Idealfall ziehen sich die Dreiecke auf einen Punkt  $\vec{c}$  zusammen, und abhängig vom (stochastischen) Startvektor  $\vec{x}$  strebt dann  $A^n \vec{x}$  gegen eben dieses  $\vec{c}$ . Philipp hatte ja schöne Bilder dazu gezeigt, und er hatte auch darauf hingewiesen, dass dieses Zusammenziehen nicht in jedem Fall gegeben ist. Wir sind ja stochastischen Matrizen begegnet, deren Potenzen nicht gegen eine Grenzmatrix streben.

## 7 Aufgaben

### 7.1 Aufgaben zu konvexen Mengen

1. Welche der folgenden Punktmen­gen sind konvex? Kugel, Dreieck, ebenes Viereck, halbe Kreisscheibe, Kreislinie, Kreis ohne Mittelpunkt, Stern.
2. Wie sieht die konvexe Hülle einer Menge von  $n$  Punkten des  $\mathbb{R}^3$  aus für  $n = 2, 3, 4$ ?
3. Zeichne einen stilisierten Tannenbaum und markiere die konvexe Hülle des gezeichneten Tannenbaumes.

4. Es sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -2 & 1 & -2 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} .$$

Wie bezeichnen die konvexe Hülle der Spaltenvektoren von  $A^k$  mit  $M_k$ . Zeichne  $M_1$  und  $M_2$  und prüfe, ob  $M_2 \subseteq M_1$  gilt. Müsste das nach Philipps Vortrag eigentlich so sein oder nicht?

5. Es sei  $A$  eine  $n \times m$ -Matrix und  $\varphi : \vec{x} \mapsto A\vec{x}$  die durch  $A$  gegebene Matrixabbildung. Zeige, dass dann für  $M = \{\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_r\} \subset \mathbb{R}^m$  gilt

$$\varphi(\text{conv } M) = \text{conv } \varphi(M) .$$

Anmerkung: Solche Verträglichkeitsaussagen spielen in der Mathematik eine bedeutende Rolle. Diese hier garantiert uns, dass das Bild eines Dreiecks unter einer Matrixabbildung einfach das Dreieck ist, dessen Ecken die Bildpunkte der Ecken des Ausgangsdreiecks sind.

## 7.2 Aufgabe LK Abitur 06

Es sei  $A(0|0|0)$ ,  $B(0|2|0)$ ,  $C(-1|1|z)$  und  $D(1|1|z)$ .

- Die Punkte  $A, B, C$  und  $D$  sind Eckpunkte eines regelmäßigen Tetraeders, und  $z$  ist positiv. Berechne  $z$  und zeichne das Tetraeder. [Zwischenergebnis:  $z = \sqrt{2}$ ]
- Das Tetraeder soll so um die Gerade  $AB$  gedreht werden, dass  $D$  dabei in die  $xy$ -Ebene kommt. Notiere die Matrix der Drehung und berechne den Bildpunkt  $D'$  von  $D$ .
- Notiere die Matrix der Spiegelung, die die Punkte  $C$  und  $D$  vertauscht, und begründe, dass sie das Tetraeder in sich überführt.
- Welchen Schatten wirft das Tetraeder auf die  $xy$ -Ebene, wenn die Sonnenstrahlen die Richtung

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

haben? Zeichne den Schatten und schreibe die Matrix der Abbildung hin, die jedem Raumpunkt seinen Schattenpunkt zuordnet.

5. Hinz behauptet, man müsse nur die Werte  $\vec{n} * \vec{a}$ ,  $\vec{n} * \vec{b}$ ,  $\vec{n} * \vec{c}$  und  $\vec{n} * \vec{d}$  berechnen, dann wisse man gleich, ob das Tetraeder von der Ebene

$$\varepsilon : \vec{n} * \vec{x} = x + y + z = 1$$

geschnitten wird. Führe Hinzens Vorschlag durch und nimm Stellung dazu.

- Es sei  $E$  der Mittelpunkt der Fläche  $ABC$  und  $F$  der Mittelpunkt der Kante  $\overline{BD}$  des Tetraeders. Ferner sei  $G$  ein beliebiger Punkt der Kante  $\overline{BC}$ . Berechne  $E$  und  $F$  und gib Terme für  $\vec{g}$  und für die Länge des Wegs von  $E$  über  $G$  nach  $F$  an. Du brauchst keine Terme nicht zu vereinfachen.
- Hast du eine Idee, wie man das  $G$  findet, für das der Weg von  $E$  über  $G$  nach  $F$  am kürzesten ist? Deute einen Lösungsweg an. Eine Durchführung wird nicht erwartet.

## 8 Dritte Klausur – Februar 2008

1. Anna, Beate und Christiane spielen häufig zusammen Ball, und zwar schon seit Kindergarten. Inzwischen haben sie feste Vorlieben entwickelt, wie sie den Ball abspielen, wenn sie ihn bekommen haben. Die Übergangsmatrix

$$M = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ \frac{3}{4} & 0 & \frac{3}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$$

gibt über diese Gewohnheiten Auskunft.

- Mit welcher Wahrscheinlichkeit spielt Anna den Ball an Christiane ab, wenn sie gerade im Ballbesitz ist?
- Als Annas Mutter das Haus verlässt, hat Anna gerade den Ball. Wer wird den Ball vermutlich haben, wenn die Mutter in etwa drei Stunden zurückkehrt?
- Wie lange dauert es im Mittel, bis Anna den Ball bekommt, wenn Christiane ihn jetzt gerade hat? Bei deiner Rechnung kannst du die Matrix

$$\begin{pmatrix} 1 & -\frac{2}{3} \\ -\frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{3}{4} & 1 \\ \frac{3}{4} & \frac{3}{2} \end{pmatrix} =: T$$

verwenden.

- Aus theoretischen Gründen will man die Eigenwerte der Matrix  $M$  wissen. Die Rechenarbeit will ich dir nicht zumuten. Berechne ersatzweise die Eigenwerte der Matrix  $T$ .
  - Wir haben hinreichende Bedingungen dafür gelernt, dass  $P^n$  für eine stochastische Matrix  $P$  für  $n \rightarrow \infty$  gegen eine Grenzmatrix strebt. Erfüllen die beiden stochastischen Matrizen, die in dieser Aufgabe vorkommen, diese Kriterien?
2. Die folgenden statistischen Angaben aus dem Kultusministerium zum Schulerfolg eines Oberstufenschülers habe ich frei erfunden: Mit der Wahrscheinlichkeit  $\frac{17}{20}$  wird er in die nächste Stufe versetzt beziehungsweise besteht er das Abitur, mit der Wahrscheinlichkeit  $\frac{1}{20}$  bricht er am Schuljahresende die Schule ab. Wir nehmen der Einfachheit halber an, diese Zahlen seien in allen drei Jahrgangsstufen gleich. Zeichne einen Übergangsgraphen und stelle eine Übergangsmatrix auf – weiter nichts!! Und Regelungen wie die Höchstverweildauer und so weiter und etwa erwartete Wirkungen der ständigen Reformpolitik lässt du außer Acht.
3. Etwas Geometrie im Raum:
- Gib die Gleichung der Kugel um den Nullpunkt an, die durch den Punkt  $P(5|0|12)$  geht, und rechne nach, dass auch der Punkt  $Q(3|-12|4)$  auf dieser Kugel liegt.
  - Berechne die Länge des kürzesten Weges von  $P$  nach  $Q$  auf der Kugel.
  - Berechne die Kugelkoordinaten  $\lambda$  und  $\varphi$  der Punkte  $P$  und  $Q$ .
  - Die Kugel soll so gedreht werden, dass  $P$  in  $Q$  kommt, und dabei soll sich  $P$  auf einem Großkreis bewegen. Um welche Achse muss man drehen?
  - Der Punkt  $A$  mit  $\lambda = 100^\circ$  und  $\varphi = -15^\circ$  liegt auf der Kugel. Berechne seine kartesischen Koordinaten.
  - Der Großkreis durch  $P$  und  $Q$  teilt die Kugel in zwei Halbkugeln. Liegt  $A$  in der gleichen Halbkugel wie der Nordpol oder in der anderen? Der Nordpol ist natürlich der Schnittpunkt der Kugel mit der positiven  $z$ -Achse.
4. Es sei  $f_a(x) = xe^{-ax}$  mit festem  $a > 0$ .



- (a) Bestimme die Nullstellen, Extrem- und Wendepunkte des Graphen von  $f_a$  und skizziere grob den Graphen von  $f_a$  für  $a = \frac{1}{4}$ .
- (b) Weise nach, dass alle Graphen im Nullpunkt die gleiche Tangente haben.
- (c) Berechne für  $b > 0$  das Integral

$$\int_0^b f_a(x) dx$$

und überlege dir, was daraus für  $b \rightarrow \infty$  wird.

- (d) Nimm nun an,  $x$  sei die Zeit seit der Erfindung des Autos in irgendeiner Zeiteinheit und für  $a = \frac{1}{4}$  sei  $f_a(x)$  der Verbrauch an Erdöl pro Zeiteinheit zur Zeit  $x$ . Interpretiere die Ergebnisse von (a) und (c) in diesem Anwendungszusammenhang.

## 9 Schlunzklausur

1. Es sei  $K$  die Kugel mit der Gleichung  $x^2 + y^2 + z^2 = 169$ , und es sei  $P$  der Punkt mit den Koordinaten  $(4|3|12)$ .

- (a) Wie weit ist es von  $P$  bis zum Nordpol?
- (b) Der Punkt, in dem die positive  $x$ -Achse die Kugel schneidet, soll auf  $P$  bewegt werden. Gib geeignete Drehmatrizen an und die Reihenfolge, in der die entsprechenden Drehungen angewandt werden sollen.
- (c) Es gibt eine Ebene, die  $P$  enthält und die die Kugel berührt. Welche Gleichung hat diese Ebene?
- (d) Es seien  $A_1 = (13|0|0)$ ,  $A_2, \dots, A_6$  die Punkte, die die Kugel mit den Koordinatenachsen gemeinsam hat. Ein Käfer lebt auf der Kugel, und er übernachtet immer in einem der Punkte  $A_k$ . Den Übernachtungspunkt für die kommende Nacht findet er so: Er wählt zufällig eine der drei (positiven) Koordinatenachsen. Der neue Übernachtungsplatz ist der, in den der alte Übernachtungsplatz bei der Drehung um  $90^\circ$  gegen den Uhrzeigersinn um die gewählte Achse übergeht. Zeichne den Übergangsgraphen und schreibe die Übergangsmatrix auf.
- (e) Der Käfer befinde sich in  $(0|13|0)$ . Wie kann man herausfinden, wie lange es im Mittel dauert, bis er in  $A_1$  ist und wie oft er auf seinem Wege im Mittel in  $(0|-13|0)$  war? Beschreibe den Weg, die Durchführung der Rechnung ist nicht verlangt.
- (f) Der Käfer legt in einer Stunde zwei Längeneinheiten zurück. Man weiß, dass er in  $A_1$  aufgebrochen ist und zwei Stunden lang geradeaus gelaufen ist. Wo auf der Kugel befindet er sich jetzt?

2. Es sei

$$A := \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad B := \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \frac{2}{3} & 1 & 0 \end{pmatrix} .$$

- (a) Zunächst geht es um die Eigenwerte der Matrix  $A$ . Diese sind die Nullstellen des Polynoms

$$p(\lambda) = -\lambda^3 + \frac{5}{4}\lambda^2 - \frac{1}{8}\lambda - \frac{1}{8} .$$

Gib Auskunft, woher dieses Polynom kommt, begründe, dass  $\lambda = 1$  sicher Eigenwert der Matrix  $A$  ist, und berechne die übrigen Eigenwerte.<sup>12</sup>

- (b) Bestimme eine Matrix  $G$ , die als Grenzmatrix von  $A^n$  für  $n \rightarrow \infty$  in Frage kommt, begründe, dass sie der einzige Kandidat ist, und schildere, was man damit anfängt.

<sup>12</sup>Die Eigenwerte der Matrix geben Auskunft, was bei  $A^n \vec{x}$  für  $n \rightarrow \infty$  herauskommt, aber ich will dich nicht damit plagen, das hier zu erörtern.

- (c) Die Menge der stochastischen Vektoren des  $\mathbb{R}^3$  kann man als Punktmenge im Raum ansehen. Um welches geometrische Gebilde handelt es sich?
- (d) Wie verhält sich  $B^n$  für  $n \rightarrow \infty$ ?
3. Es sei  $f := x \mapsto 1 - (x + 1)e^{-x}$ .
- (a) Bestimme Nullstellen, Extrem- und Wendepunkte des Graphen von  $f$  und skizziere den Graphen.
- (b) Wie verhält sich  $f(x)$  für  $x \rightarrow \infty$ ?
- (c) Berechne den Inhalt des Flächenstücks zwischen dem Graphen und der Geraden  $y = 1$ , das im ersten Quadranten liegt.
- (d) Schauen wir uns nun an, was uns die Funktion über den stadtbekanntem Schüler Schlunz sagt. Es sei  $f(x)$  die Wahrscheinlichkeit, dass Schlunz in der nächsten Klausur ein ausreichendes Ergebnis erreicht, wenn er  $x$  Wochen Arbeit investiert. Schau dir den Graphen an und formuliere einen Rat an Schlunz, wie er sich verhalten sollte.
- (e) Finde anhand des abgebildeten Graphen heraus, wieviele Wochen Arbeit er investieren muss, damit er wenigstens mit der Wahrscheinlichkeit 60% ein ausreichendes Klausurergebnis erzielt.
- (f) Schlunz möchte von dir wissen, in welchem Bereich von  $x$  er wenigstens mit der Verbesserung seiner Aussichten um 0.05 pro eingesetzter Woche Arbeit rechnen kann. Schreibe einen professionellen Ansatz hin, berechnen musst du den Bereich nicht.
- (g) Finde anhand der Zeichnung einen Näherungswert für die rechte Grenze des profitablen Bereiches, nach dem Schlunz im letzten Aufgabenteil fragte.

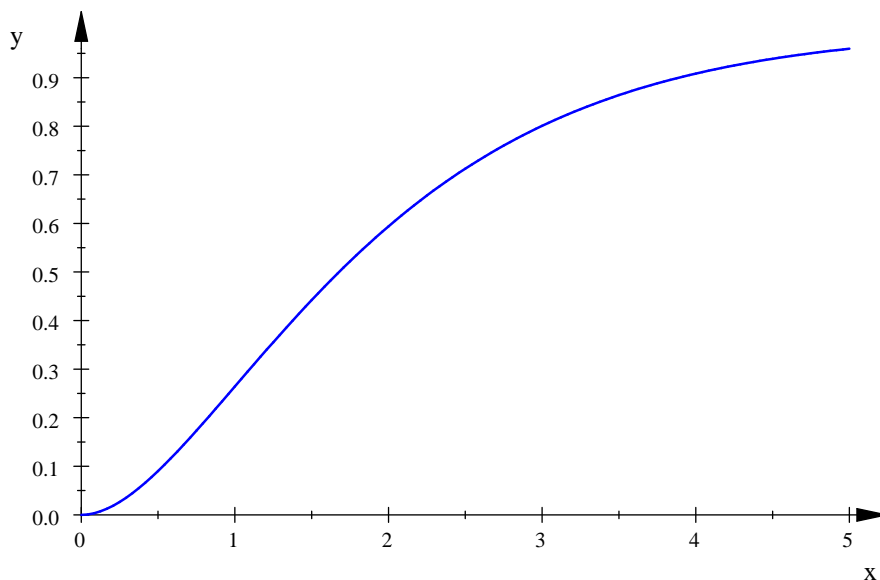


Abbildung 5: Graph von  $f$  für  $0 \leq x \leq 5$

## 10 Ratschläge für die Vorbereitung auf die Abiturklausur

Wir haben eine Menge gemacht, und nicht alles davon ist für die Abiturklausur relevant. Natürlich ist all das Gelernte gut und nützlich zu wissen, aber hier sei einmal der unverzichtbare Kern

dargestellt, damit der Schlunz weiß, wo er anfangen muss. Die letzten zehn Prozent des Erfolges kosten fünfzig Prozent der Anstrengung, und wenn jemand mit den letzten zehn Prozent anfängt, fehlt es bei den Grundlagen.

## 10.1 Analysis

1. **Ableitung:**  $h$ -Ansatz, Deutung als Steigung und als Änderungsrate, Berechnung von Ableitungen mit Hilfe der Regeln.
2. **Integral:** Riemannsches Summe, Deutung als orientierter Flächeninhalt und als Gesamtänderung, Berechnung von Integralen mit Hilfe der Regeln, Stammfunktion
3. **Anwendungen:** Aussagen über Funktionen und Kurven mit Hilfe der Ableitung – Monotonie, Extrem- und Wendepunkte (hinreichende Bedingungen nicht vergessen!)
4. **wichtige Funktionen und ihre Eigenschaften:** ganzrationale Funktionen, Exponentialfunktionen, trigonometrische Funktionen
5. **Interpretationen in Anwendungszusammenhängen** Dass die Ableitung die lokale Änderungsrate ist, was das bedeutet und wie man daraus Aussagen über Änderungen der Größen gewinnt, muss absolut sitzen.

Daniel fragte nach Differentialgleichungen, das sind Gleichungen, in denen eine Funktion und ihre Ableitungen auftreten können, wie zum Beispiel

$$y'' + 9y = 0.$$

Eine Lösung einer Differentialgleichung ist eine Funktion. Bei dieser Differentialgleichung hier ist zum Beispiel  $y = \sin(3x)$  eine Lösung. Das prüfst du nach, indem du für das  $y$  in der Differentialgleichung  $\sin(3x)$  einsetzt und nachrechnest, dass dann da etwas Richtiges steht. Mehr wird von dir auf keinen Fall erwartet. Das ist leicht, du darfst nur nicht in Schreckstarre verfallen. Was wir über Lösungskurven und Euler–Cauchy–Verfahren und so etwas wissen, kann eigentlich nicht verlangt werden.

## 10.2 Stochastik

1. **Wahrscheinlichkeit**, elementare Berechnung mit Hilfe von Pfadregeln und Zählverfahren.
2. **Zufallsgrößen** und ihre Kennzahlen: Erwartungswert und Varianz musst du berechnen und deuten können.
3. **Binomialverteilte Zufallsgrößen**, Standardisierung, Anwendung von  $\varphi$  und  $\Phi$ .
4. Ein- und zweiseitiger **Hypothesentest:**  $H_0$  und  $H_1$ ,  $\alpha$ , Entscheidungsregel,  $p \mapsto P(X_p < g)$ . Du musst wissen, wie man testet.

## 10.3 Lineare Algebra und Geometrie

1. **Geometrie im Anschauungsraum:** Längen, Winkel, Orthogonalität, Geraden, Ebenen (in beiden Darstellungsformen!)
2. **Matrixabbildungen:** einfache geometrische Abbildungen des Raumes und der Ebene, auch Projektionen, und ihre Beschreibung mit Hilfe von Matrizen; Fixgeraden und Fixpunkte, Eigenwerte und Eigenvektoren. Bei der Berechnung von Eigenwerten kann die Determinante hilfreich sein.
3. **Übergangsmatrizen:** Beschreibung der Zustandsänderungen von Systemen mit Hilfe von Matrizen, Übergangsgraph, Verhalten auf lange Sicht, Fixvektoren.

Natürlich hast du die nötigen Hilfsmittel der Linearen Algebra zur Verfügung: Du kannst im  $\mathbb{R}^n$  rechnen, du kennst das Skalarprodukt und kannst damit umgehen. Du kennst lineare Unabhängigkeit, Basis und Dimension, und du kennst dich natürlich mit Linearen Gleichungssystemen aus. Du weißt, dass Eigenvektoren einer Matrix zu verschiedenen Eigenwerten linear unabhängig sind, und du verfügst über eine recht ordentlich entwickelte Theorie Markoffscher Prozesse. Ich denke nicht, dass dir abstrakte Schlüsse in diesem Bereich abverlangt werden, aber das ist Spekulation.