

Dynamische Systeme

B. Waldmüller

Mathematischer Samstag am Söderblom-Gymnasium
am 24. September 2016

Inhaltsverzeichnis

1 Grundlagen und erste Beispiele	2
1.1 Einführung	2
1.2 Kritische Punkte, Orbits und Phasenportrait	4
1.3 Ein Lösungsverfahren für Anfangswertaufgaben	7
1.4 Zwei Beispiele aus der Biologie	9
1.4.1 Gnus und Sung	9
1.4.2 Ratten und Katzen	11
1.4.3 Bilderbuch zum Problem „Ratten und Katzen“	12
1.5 Bilderbuch: Typen kritischer Punkte	14
1.6 Sattelpunkte	17
1.7 Zum praktischen Gebrauch numerischer Verfahren	18
2 Wichtiges Beispiel: Das Pendel	20
2.1 Das Pendel und seine Differentialgleichung	20
2.2 Untersuchung der Differentialgleichung des Pendels	21
2.3 Noch ein Blick auf das Phasenportrait des Pendels	24
2.4 Das gestörte Pendel	25
3 Genauigkeitsfragen	28
3.1 Einfluss des Startwerts	28
3.2 Auswirkung von Parametern in der Gleichung	28
3.3 Vereinfachungen der Gleichung	28
3.4 „Vorherbestimmt, aber nicht vorhersagbar“	30
4 Himmelsmechanik	31
4.1 Ein Blick in die Geschichte	31
4.2 Etwas über Poincarés neue Ideen	33
4.3 Nachtrag: Poincaré–Abbildung	34
5 Literatur	36

1 Grundlagen und erste Beispiele

1.1 Einführung

Ich muss den Ball flach halten, damit ihr nicht umkommt in einem Gewirr von Begriffen. Diese einfache Vorstellung reicht für uns völlig aus: Ein Punkt bewegt sich mit der Zeit in einem Gebiet. Wie er sich bewegt, wird durch eine Differentialgleichung gesteuert.

Je nach der Dimension des Gebietes braucht man eine, zwei oder mehr Koordinaten, um einen Punkt zu bestimmen. Wir beschränken uns auf die Dimensionen eins und zwei, unser Punkt bewegt sich also auf einer Linie oder in einer Fläche. Damit ist seine Lage zu einem Zeitpunkt t festgelegt durch eine Zahl $x = x(t)$ oder durch ein Zahlenpaar $x = x(t)$, $y = y(t)$. Die Zahlen ändern sich mit der Zeit, wir haben es also mit Funktionen zu tun, die eben nur nicht f und g heißen, sondern x und y .

Beispiel: Die Bewegung eines Steines kann durch

$$x = -10t^2$$

oder durch

$$x = t \quad \text{und} \quad y = -10t^2$$

beschrieben werden. Beim ersten Beispiel handelt es sich um freien Fall, im zweiten um einen waagerechten Wurf. $\square$

In diesem Beispiel ist der Ort des Steines für jeden Zeitpunkt $t \geq 0$ explizit angegeben. Im Normalfall weiß man aber nur den Ort $x_0 = x(t_0)$ zu einem Zeitpunkt t_0 und man hat eine **Differentialgleichung**

$$\dot{x} = f(t, x) \quad , \quad (1)$$

die festlegt, wie sich die Größe x mit der Zeit ändern kann. Für die meisten hier muss ich das erklären: Zur Zeit t befindet sich der Punkt an der Stelle $x(t)$, eine kurze Zeitspanne Δt später an der Stelle

$$x(t + \Delta t) = x(t) + \Delta x \quad .$$

Die Ortsänderung in der Zeitspanne Δt ist folglich

$$\Delta x = x(t + \Delta t) - x(t) \quad .$$

Dividiert man durch Δt , steht da der vertraute Differenzenquotient oder die mittlere Änderungsrate

$$\frac{\Delta x}{\Delta t} \quad ,$$

und für $\Delta t \rightarrow 0$ wird daraus die lokale Änderungsrate von x zur Zeit t oder der Wert der Ableitung der Funktion x nach der Zeit zum Zeitpunkt t . Ungewohnt ist nur, dass die Funktion x heißt und dass die Ableitung in der Theorie Dynamischer Systeme nicht mit dem üblichen Strich (nach Lagrange) sondern mit einem Punkt (nach Newton) geschrieben wird:

$$\frac{\Delta x}{\Delta t} \xrightarrow{\Delta t \rightarrow 0} \dot{x}(t)$$

Inwiefern legt die Differentialgleichung das Änderungsverhalten der Funktion x fest? Für ein sehr kleines Δt stimmt die mittlere Änderungsrate ziemlich gut mit der lokalen Änderungsrate überein:

$$\frac{\Delta x}{\Delta t} \approx \dot{x}(t)$$

Also gilt für kleine Δt in guter Näherung

$$\Delta x \approx \dot{x}(t)\Delta t \quad \text{bzw.} \quad x(t + \Delta t) \approx x(t) + \dot{x}(t)\Delta t .$$

Das solltest du eigentlich gut kennen. In einer kleinen Umgebung von t ersetzt man den Graphen der Funktion x durch die Tangente im Punkt $(t|x(t))$ des Graphen.

Beispiel. Eine Tasse Tee nimmt auf die Dauer die Temperatur ihrer Umgebung an. Die Temperatur des Tees ändert sich zum Zeitpunkt t um so schneller, je größer der Unterschied zwischen der Temperatur $x(t)$ der Tasse und der Umgebungstemperatur $T(t)$ ist. Wir sehen die Umgebungstemperatur als konstant an – was sie, streng genommen, natürlich nicht ist – und schaffen uns durch geeignete Wahl der Einheiten lästige physikalische Konstanten vom Hals. Dann ist für sehr kleine Δt für $T = 20$

$$\Delta x \approx -(x - 20)\Delta t ,$$

und das führt zu

$$\dot{x} = -(x - 20) .$$

Da haben wir unsere Differentialgleichung. Die folgende Abbildung zeigt, wie sich die Temperatur des Tees für verschiedene Starttemperaturen $x(0)$ entwickelt.

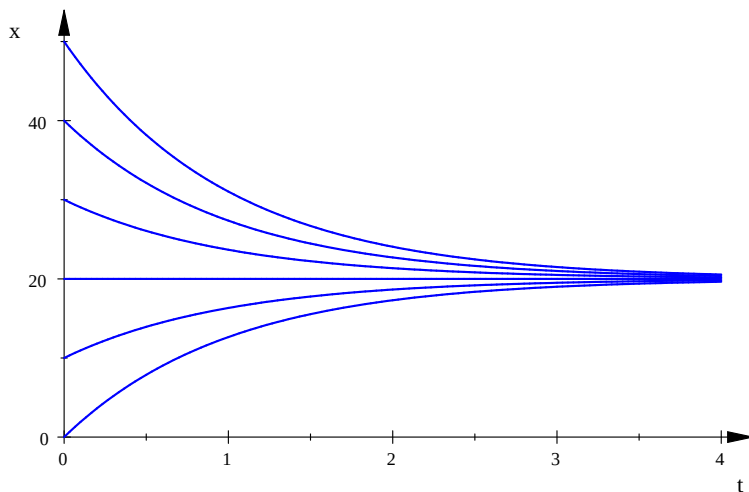


Abbildung 1: Zeitliche Entwicklung der Temperatur einer Tasse Tee

Das sieht doch schon ganz vernünftig aus!

□

1.2 Kritische Punkte, Orbits und Phasenportrait

Die Abbildung 1 auf der Seite 3 zeigt die Funktionsgraphen der Lösungen der Gleichung $\dot{x} = -(x - 20)$ für einige Startwerte x_0 in einem tx -Schaubild. Das ist ganz schön, gewöhnlich wählt man bei Dynamischen Systemen aber eine etwas andere Darstellung, nämlich das Phasenportrait. Hier ist das Phasenportrait erst einmal

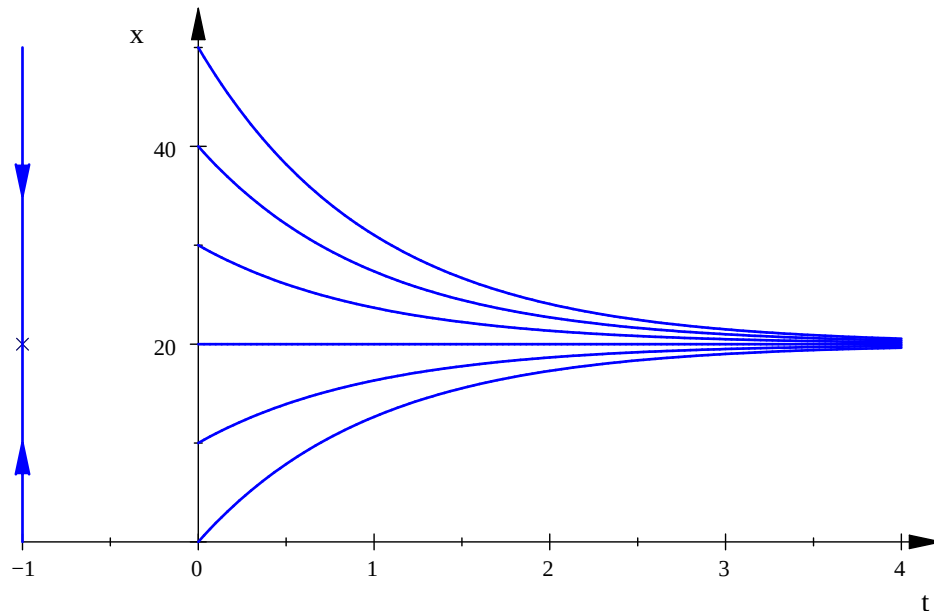


Abbildung 2: Phasenportrait und Graphen von Lösungskurven von $\dot{x} = -(x - 20)$

in die Abbildung 1 mit eingezeichnet, damit du siehst, wie es zustandekommt, und hier ist es allein:

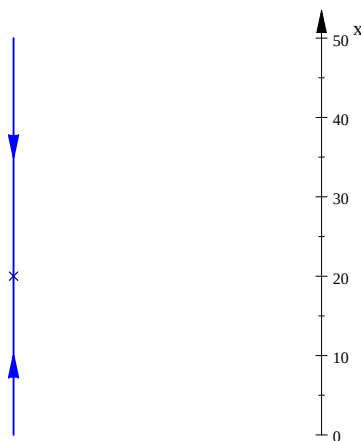


Abbildung 3: Phasenportrait von $\dot{x} = -(x - 20)$

Der Strich steht für eine Zahlengerade; ich hatte euch ja das Bild vor Augen gestellt, dass sich ein Punkt in einem Gebiet bewegt, und die Gerade ist das Gebiet. Die Pfeile deuten an, in welche Richtung sich der Punkt jeweils bewegt. Das hängt

nur vom Vorzeichen der rechten Seite $f(x)$ der Differentialgleichung ab. Für $x > 20$ ist $-(x - 20)$ negativ, für solche x ist Δx deshalb auch negativ, der Punkt bewegt sich nach unten. Die Menge

$$]20, \infty[= \{x \mid 20 < x < \infty\}$$

ist eine Bahn oder ein **Orbit**, ebenso wie die Menge

$$]-\infty, 20[= \{x \mid -\infty < x < 20\}$$

und die Menge

$$\{20\}.$$

Nimmt man ein Element eines Orbits als Startwert, bleiben alle Werte $x(t)$ des zugehörigen Anfangswertproblems in diesem Orbit, und zu zwei Elementen a, b des Orbits gibt es eine Lösung $x = x(t)$ der Differentialgleichung, für die $a = x(t_1)$ und $b = x(t_2)$ ist.

Der Wert 20 ist allein in seinem Orbit; das ist etwas Besonderes. Ein solcher Wert heißt **kritischer Punkt** oder **stationärer Punkt**. Kritische Punkte sind genau die Nullstellen der rechten Seite $f(x)$ der Differentialgleichung: Aus $f(a) = 0$ folgt, dass $x(t) = a$ ist für alle $t \in \mathbb{R}$.

Beim Beispiel hier gilt sogar für jede Lösung $x = x(t)$ der Differentialgleichung, dass $x(t)$ gegen 20 strebt für $t \rightarrow \infty$, deshalb heißt 20 ein **Attraktor**. Allerdings erreicht man von keinem Startwert $x_0 \neq 20$ aus den Wert 20 in endlicher Zeit.

Aufgabe. Bestimme die kritischen Punkte und zeichne das Phasenportrait zu den folgenden Differentialgleichungen.

$$\dot{x} = x \tag{2}$$

$$\dot{x} = -x \tag{3}$$

$$\dot{x} = x(1 - x) \tag{4}$$

$$\dot{x} = x^2 \tag{5}$$

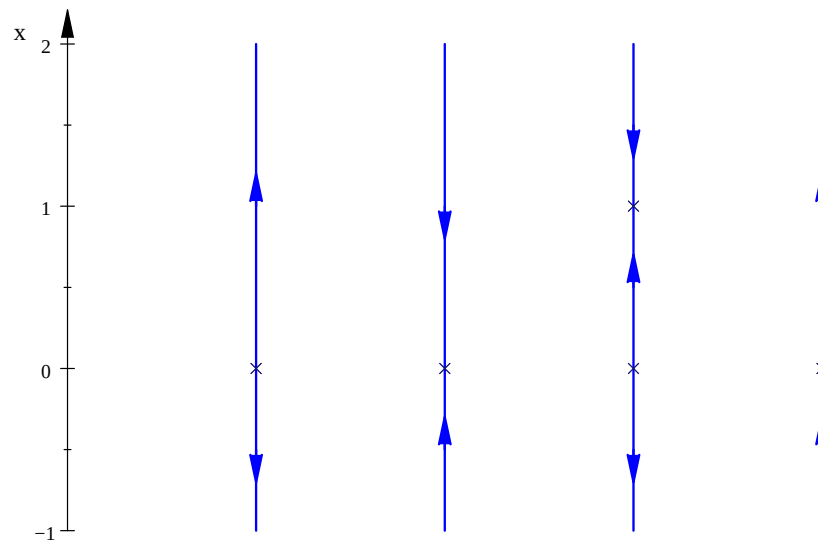


Abbildung 4: Phasenportraits zu den Differentialgleichungen der Aufgabe auf der Seite 5. Welche kritischen Punkte sind anziehend, welche abstoßend?

Das Phasenportrait gibt, quantitativ gesehen, nur eine unvollständige Information, aber das qualitative Verhalten der Lösungen beschreibt es sehr gut. In dem Phasenportrait zu $\dot{x} = x$ ganz links erkennt man, dass $x(t)$ für jeden Startwert $x_0 < 0$ im Laufe der Zeit kleiner wird. Es gilt sogar, dass $x(t)$ für $t \rightarrow \infty$ gegen $-\infty$ strebt.¹ Man sieht nur nicht, wie schnell sich $x(t)$ bewegt.

Zum späteren Gebrauch lassen wir uns jetzt noch im tx -Schaubild eine Schar von Lösungskurven zur ersten und zur dritten Differentialgleichung zeichnen:

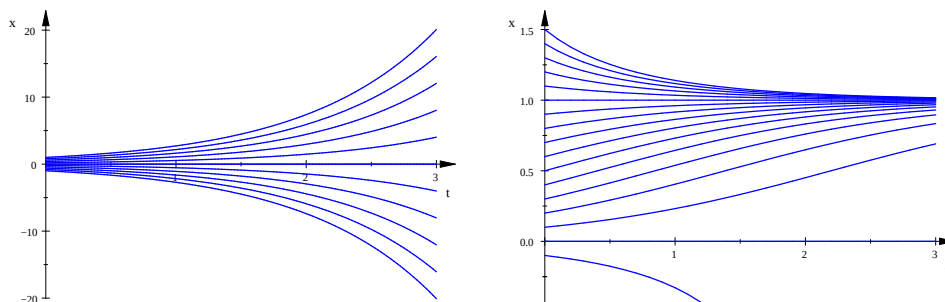


Abbildung 5: Eine Schar von Lösungskurven im tx -Schaubild von $\dot{x} = x$ und von $\dot{x} = x(1 - x)$

Bemerkung: Die Anfangswerte zur Zeit $t = 0$ der Lösungskurven im linken Bild liegen alle zwischen -1 und 1 . Schon nach drei Zeiteinheiten streuen die Werte im Bereich von -20 bis 20 , und die Unterschiede wachsen im weiteren Verlauf rasant an. Dieses Phänomen wird uns noch beschäftigen.

¹Siehe die Argumentation in Jänich, Seite 178/179.

1.3 Ein Lösungsverfahren für Anfangswertaufgaben

Wie kommt man eigentlich an die Lösungskurven, wie sie zum Beispiel in Abbildung 5 auf Seite 6 zu sehen sind? Wir werfen nicht einmal einen flüchtigen Blick hinüber zu der weitläufigen Theorie über das Lösen von Differentialgleichungen, sondern wir beschränken uns darauf, über ein geniales altes Verfahren nachzudenken, das sich aus der Problemstellung ganz natürlich ergibt.

Es sei die Differentialgleichung

$$\dot{x} = f(x)$$

vorgegeben. Wir suchen nach einer Lösung $x = x(t)$, die zu einer Zeit t_0 den Wert x_0 annimmt. Diese Problemstellung nennt man ein Anfangswertproblem, und es gibt sehr komfortable Aussagen aus der Theorie, dass die Aufgabe in der Regel eindeutig lösbar ist.² Mit dieser beruhigenden Aussage im Hinterkopf gehen wir recht naiv folgendermaßen vor. In einer kleinen Zeitspanne Δt ändert sich der Wert von x um $\Delta x \approx f(x_0)\Delta t$. Also gilt

$$x(t_0 + \Delta t) = x_0 + \Delta x \approx x_0 + f(x_0)\Delta t .$$

Wiederholen wir diesen Schritt, bekommen wir

$$\begin{aligned} x(t_0 + 2\Delta t) &\approx [x(t_0 + \Delta t)] + f(x_0 + \Delta t)\Delta t \\ &\approx x(t_0) + f(x_0)\Delta t + f(x_0 + \Delta t)\Delta t , \end{aligned}$$

und so weiter. Im tx -Schaubild können wir uns die Sache so veranschaulichen: Ein Punkt des Graphen ist $(t_0|x_0)$. Wenn wir auf dem Graphen entlanglaufen, kommen wir zum neuen Punkt $(t_0 + \Delta t|x_0 + \Delta x)$. Wir haben den Graphen nicht, statt dessen laufen wir ein kurzes Stück auf der Tangente an den Graphen im Punkt $(t_0|x_0)$ weiter zum neuen Punkt $(t_0 + \Delta t|x_0 + f(x_0)\Delta t)$. Der liegt zwar in aller Regel nicht mehr auf dem gesuchten Graphen, aber für kleine Δt sehr nah dabei.

Das Verfahren, dessen Idee ich eben zu beschreiben versuchte, heißt Euler–Cauchy–Verfahren; es ist genial einfach, und – es funktioniert. Suchen wir den Wert $x_1 = x(t_1)$ für ein $t_1 > t_0$, teilen wir die Zeitspanne $t_1 - t_0$ in eine Anzahl n Teilstücke der Größe

$$(\Delta t)_n = \frac{1}{n}(t_1 - t_0)$$

und bestimmen mit der oben angedeuteten Methode einen Näherungswert $(x_1)_n$ für $x_1 = x(t_1)$. Für $n \rightarrow \infty$ strebt der Näherungswert gegen den exakten Wert! Denn es gilt ja

$$x(t_1) - x(t_0) = \int_{t_0}^{t_1} \dot{x}(t) dt = \int_{t_0}^{t_1} f(x(t)) dt ;$$

wenn wir unser Verfahren durchführen, bilden wir eigentlich nur eine Folge Riemannscher Summen für das Integral auf der rechten Seite.

Es folgt ein Beispiel, bei dem man zuschauen kann, wie es sich auswirkt, wenn man die Schrittweite verkleinert.

²Für Experten: Hinreichend ist, dass die Funktion auf der rechten Seite stetig differenzierbar ist, es reicht sogar Lipschitz–Beschränktheit. Aber Vorsicht, dass eine Lösung existiert, heißt noch lange nicht, dass man sie auch geschlossen hinschreiben kann – als Potenzreihe oder gar als Term in elementaren Funktionen.

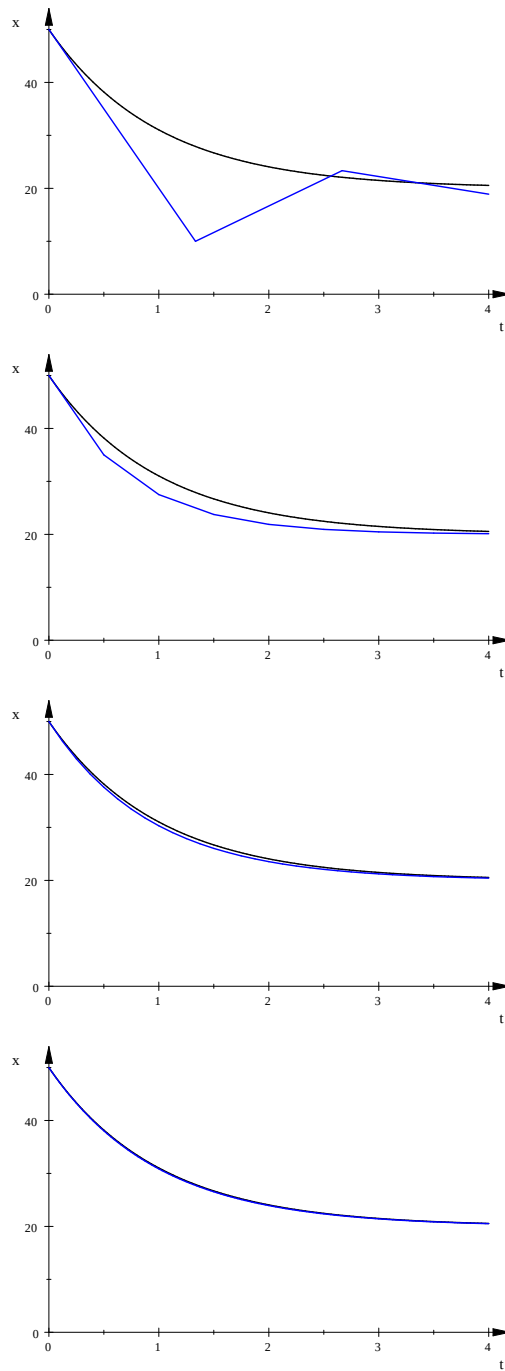


Abbildung 6: Näherungslösungen für die Anfangswertaufgabe $\dot{x} = -(x - 20)$, $x(0) = 50$ mit $t_0 = 0$ und $t_1 = 4$ für $n = 3$, $n = 8$, $n = 32$ und für $n = 128$ Teilstücke. Gezeichnet ist jeweils der exakte Graph (schwarz) und der Polygonzug, dessen Knoten nach dem Euler-Cauchy-Verfahren bestimmt wurden. Drei Teilstücke sind erkennbar zu wenige, bei 128 Teilstücken bekommt man schon eine gute Näherung. Vergleiche Abbildung 1 auf Seite 3.

1.4 Zwei Beispiele aus der Biologie

1.4.1 Gnus und Sung

Im Land Eriwan leben Gnus und Sung, ihre genetisch etwas modifizierten Verwandten, gemeinsam auf einer grossen Weide und fressen Klee. Die Anzahlen x der Gnus und y der Sung zur Zeit t sind verknüpft durch das folgende System von Gleichungen:

$$\dot{x} = x \left(\frac{5}{2} - x \right) - 2xy \quad (6)$$

$$\dot{y} = y(2 - y) - \frac{3}{2}xy \quad (7)$$

Das Beispiel stammt aus dem Buch von Enns³. Modelle dieser Art kommen in der Biologie vor, man untersucht damit die Entwicklung von Populationen. Vor Fragestellungen mit realen Daten haben die Fantasiereisenden den Vorteil, dass man sich nicht mit unbequemen Zahlen herumplagen muss.

Wir haben es hier mit einem System zweier Differentialgleichungen (erster Ordnung) zu tun. Eine Lösung ist ein Paar $(x(t), y(t))$ von Funktionen in t . Das ist genau so wie bei linearen Gleichungen, deren Lösungen Zahlen sind, und einem System zweier linearer Gleichungen, deren Lösungen Zahlenpaare sind. Und Zahlenpaare kann man als Koordinaten von Punkten ansehen! – Die Anfangsbedingung ist ebenso ein Paar (x_0, y_0) von Werten.⁴

Schauen wir uns die Gleichungen an. Falls es zur Zeit $t = 0$ keine Sung gibt, entstehen auch keine, denn die zweite Gleichung wird dann mit $y(t) = 0$ für beliebiges $x(t)$ gelöst. Die erste Gleichung nimmt nun die Form

$$\dot{x} = x \left(\frac{5}{2} - x \right)$$

an. So etwas kennen wir schon! Da die Anzahl der Tiere ≥ 0 sein muss, wird sich der Bestand der Gnus bei $x = \frac{5}{2}$ einpendeln. Gibt es Tiere beider Arten, wird die lokale Änderungsrate $\dot{x}$ der Anzahl der Gnus gegenüber dem Fall $y = 0$ vermindert, und zwar um so stärker, je größer das Produkt xy ist. – Entsprechendes gilt für die Anzahl y der Sung.

Enns stellt dem Leser nun den Auftrag, die Entwicklung der Population zu untersuchen, bei der $x(0) = y(0) = 5$ ist.⁵ Wir bekommen näherungsweise eine Lösungskurve, indem wir das Euler–Cauchy–Verfahren in naheliegender Weise modifizieren: Ist das System zur Zeit t im Zustand $(x(t), y(t))$, wird es zur Zeit $t + \Delta t$ im Zustand $(x(t + \Delta t), y(t + \Delta t)) = (x(t) + \Delta x, y(t) + \Delta y)$ sein, und die Änderungen Δx und Δy berechnen wir wie früher:

$$\Delta x \approx \dot{x} \Delta t \quad \text{und} \quad \Delta y \approx \dot{y} \Delta t$$

Und wie $\dot{x}$ und $\dot{y}$ zur Zeit t aussehen, sagen uns gerade die gegebenen Gleichungen. Wir erhalten als Ergebnis die Kurve in der Abbildung 7.

³Enns, Problem 1–12, Seite 24

⁴Wenn du schon mit Vektoren zu tun hattest, wird dir einleuchten, dass man das System einfach in der Form $\frac{d}{dt} \vec{x} = \vec{F}(\vec{x})$ notieren kann.

⁵Fünf Gnus und fünf Sung? Tja, man kann das rechnen, und man kann sich dahin retten, dass man die Einträge der Lösungspaare, die in aller Regel nicht mehr ganzzahlig sind, als Erwartungswerte ansieht. Aber es bleibt doch die Frage, was die lokale Änderungsrate, die ja ein Grenzwert für $\Delta t \rightarrow 0$ ist, bedeutet, wenn die Anzahl der Gnus sich von fünf auf z.B. vier oder sechs ändern kann. Wenn man zu kritisch an die Dinge herangeht, verliert man manches Hilfsmittel. Tatsache ist, dass V. Volterra das Modell erfolgreich auf Fischbestände im Mittelmeer angewandt hat und dass es in der Biologie benutzt wird. Und wir können $x(0) = 5$ ja auch so lesen, dass es zum Zeitpunkt $t = 0$ gerade fünftausend Gnus gibt. Das mildert die Sache etwas ab.

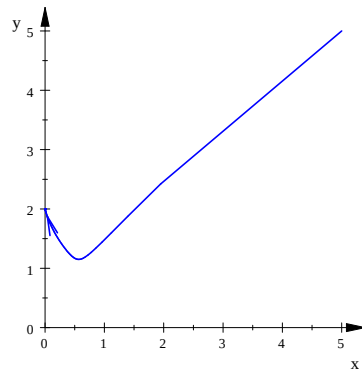


Abbildung 7: Näherungslösung zum Gnus–Sung–Problem, Startwert $(5, 5)$, klassisches Runge–Kutta–Verfahren, 100 Schritte, Schrittweite 0.1. Anmerkung: Die Pfeilspitze gibt die Richtung an, in der die Kurve durchlaufen wird; sie ist dort eingezeichnet, wo der Punkt nach der Hälfte der Laufzeit ist.

Das sieht nun etwas seltsam aus. Du wirst die Kurve deuten können. Und dann? Hier bringt uns folgendes Hilfsmittel weiter. Jeder Punkt (x, y) der Ebene (mit nichtnegativen Koordinaten) steht für einen möglichen Zustand des Systems. Von diesem Punkt aus wird es sich in der kleinen Zeitspanne Δt um Δx nach rechts und um Δy nach oben ändern. Diese Information „ Δx nach rechts, Δy nach oben“ kodieren wir als Pfeil. Eigentlich ist in jedem Punkt ein solcher Pfeil anzuheften, aber das bringt nichts. Aber wenn wir in jedem Punkt eines Gitters, dessen Maschen wir festlegen, den zugehörigen Pfeil anheften, bekommen wir etwas, was wir anschauen können. Das sieht dann so aus:

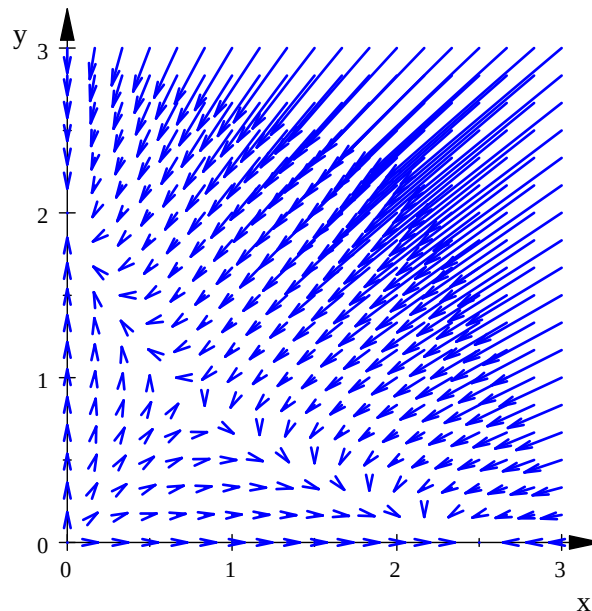


Abbildung 8: Richtungsfeld zum Gnus–und–Sung–System

Versuche, die Abbildung zu deuten. In Abbildung 9 auf der Seite 11 sind mehrere Lösungskurven zu sehen, das mag dir eine Hilfe sein.

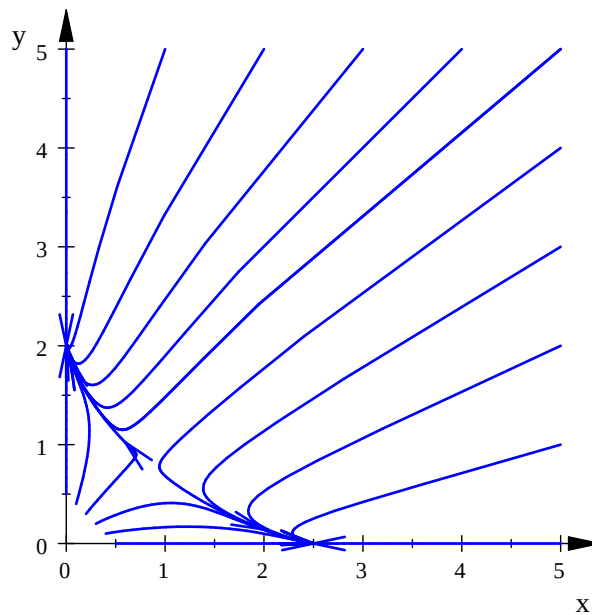


Abbildung 9: Schar von Lösungskurven des Gnus-und-Sung-Systems

Fragen:

1. Enns fragt, ob Gnus und Sung jemals koexistieren können. Was meinst du?
2. Berechne die kritischen Punkte des Systems.

1.4.2 Ratten und Katzen

Etwas anders liegen die Dinge in einem weiteren Beispiel⁶. Ich lege es dir in dieser Form vor: Auf einer Insel leben x Ratten und y Katzen, die den Ratten nachstellen. Die zeitliche Veränderung der Populationen sei durch das folgende Gleichungssystem gegeben:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= 3x - \frac{1}{2}xy \\ \dot{y} &= -y + \frac{1}{10}xy\end{aligned}$$

Aufträge

1. Vergleiche dieses System mit dem System zu den Gnus und den Sung. Achte besonders auf die Vorzeichen.
2. Berechne die kritischen Punkte.
3. Erzeuge die Lösungskurve zum Startwert $x_0 = 5$ und $y_0 = 6$.
4. Erzeuge geeignete Bilder des Richtungsfeldes.

⁶Enns, Seite 17ff

1.4.3 Bilderbuch zum Problem „Ratten und Katzen“

Die folgenden Abbildungen wurden mit MuPAD erstellt.⁷

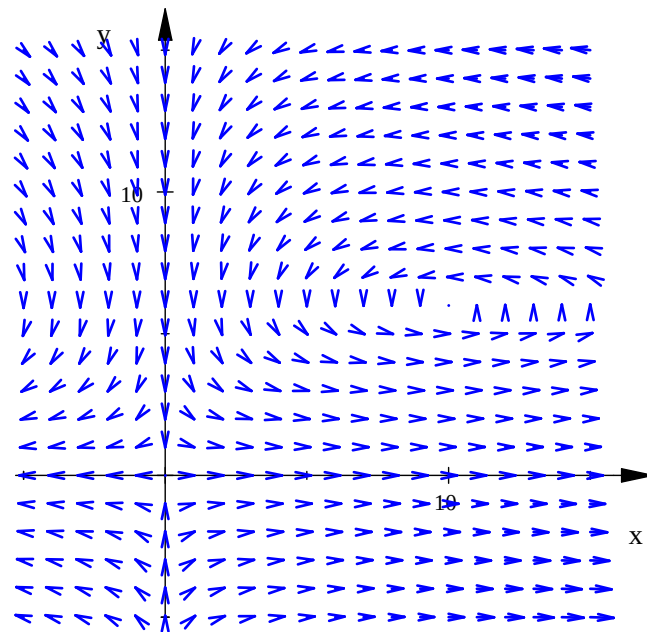


Abbildung 10: Das Richtungsfeld verschafft einen ersten Überblick

⁷ennsRatsCats.mn

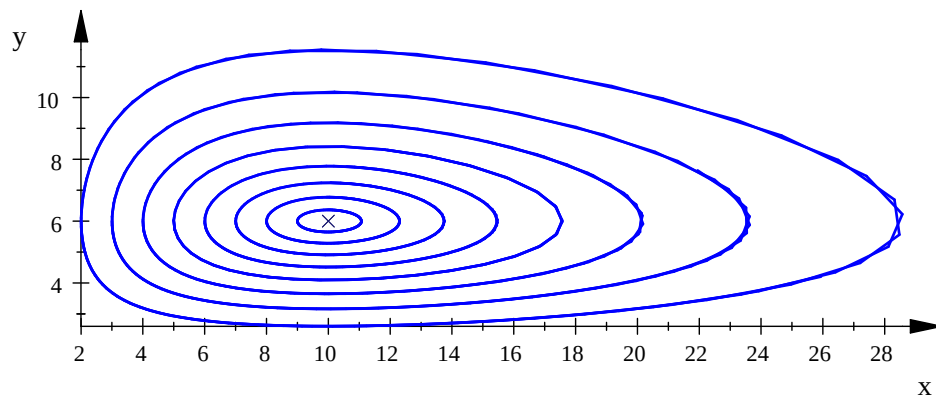


Abbildung 11: Eine Schar von Lösungskurven

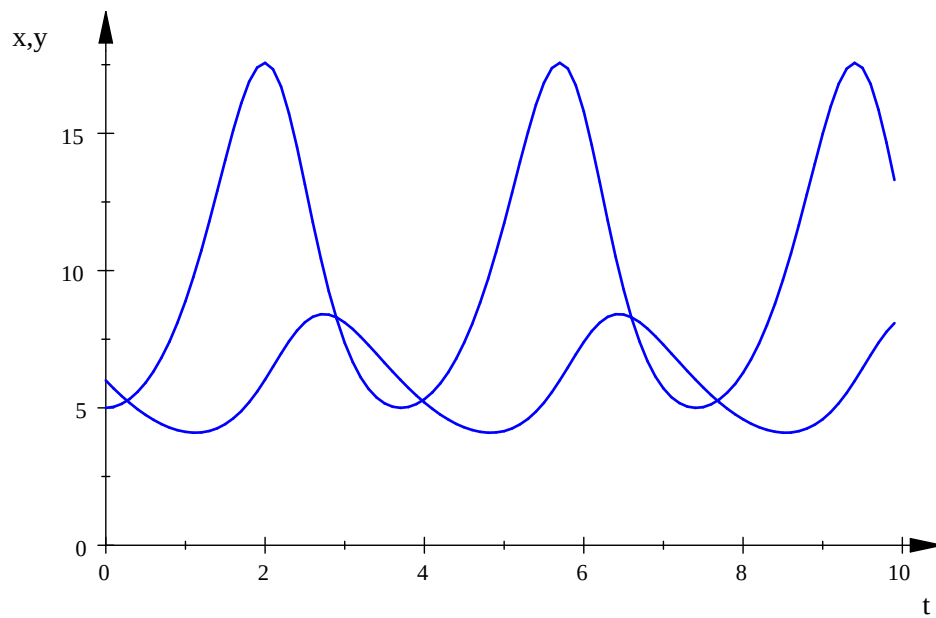
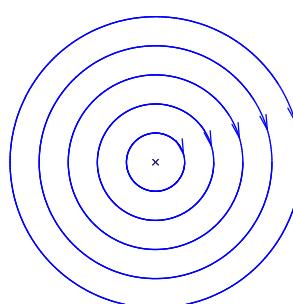
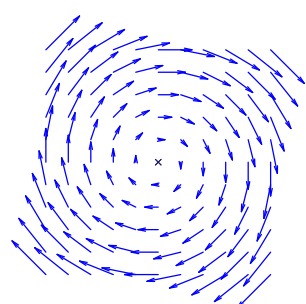
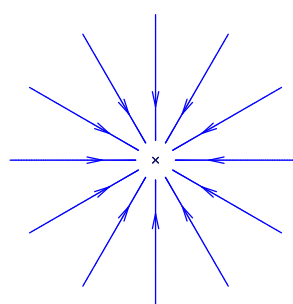
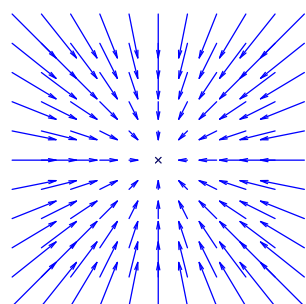
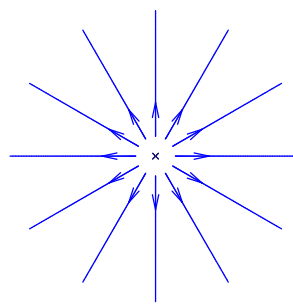
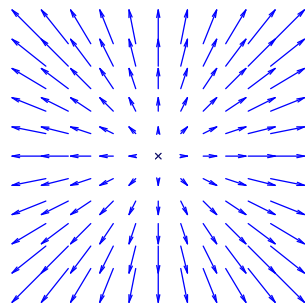
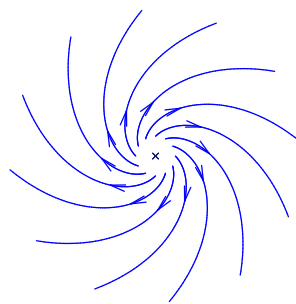
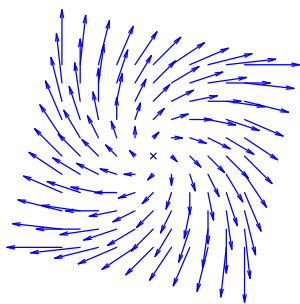
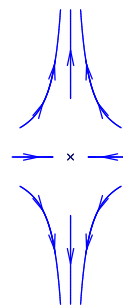
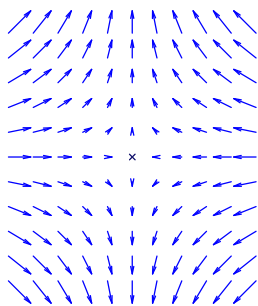
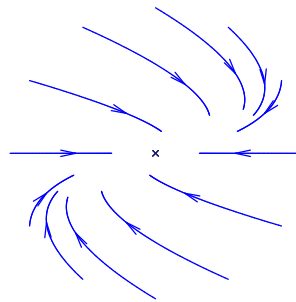
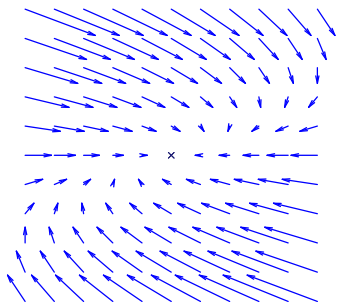
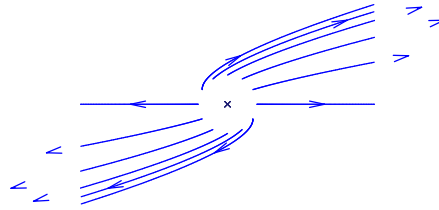
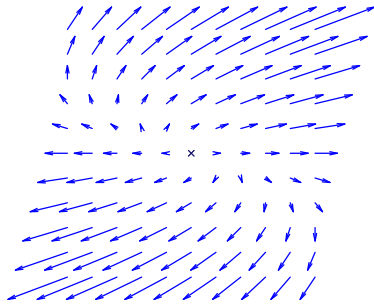


Abbildung 12: Zeitliche Entwicklung der Bestände der Ratten und der Katzen – Maxima werden nicht zu den gleichen Zeiten angenommen!

1.5 Bilderbuch: Typen kritischer Punkte

Hier habe ich eine kleine Bildersammlung erstellt, die zeigt, wie es in der Umgebung kritischer Punkte typischerweise aussieht. Die Differentialgleichungen sind Systeme zweier Differentialgleichungen erster Ordnung, die Berechnungen findet man in in der MuPAD-Datei `bilderkritP.mn`. Dargestellt sind jeweils das Richtungsfeld (links) und eine Schar von Lösungskurven (rechts daneben).





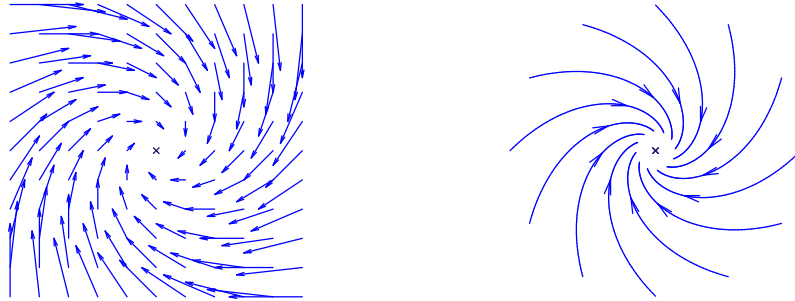


Abbildung 13: Letztes der neun Beispiele

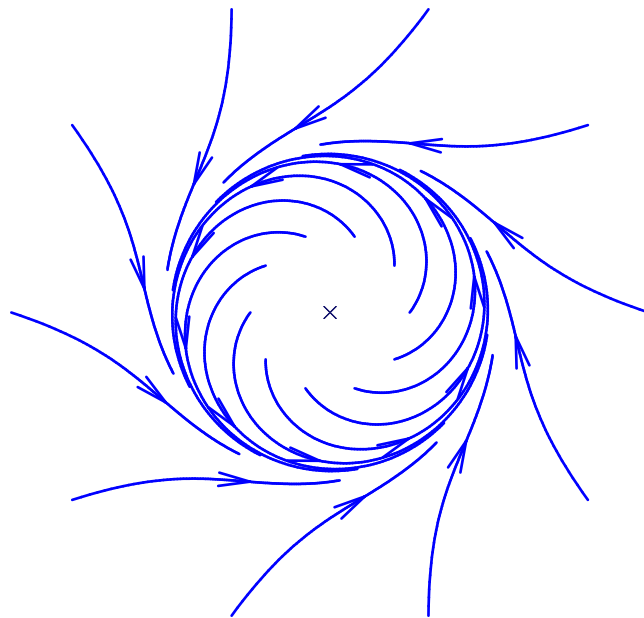


Abbildung 14: Grenzyklus: Die Lösungskurven wickeln sich spiralig von innen und von außen auf den Kreis

1.6 Sattelpunkte

Eine Sorte kritischer Punkte will ich etwas ausführlicher behandeln: die Sattelpunkte. Wir betrachten dieses System⁸:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= x \\ \dot{y} &= x^2 - y\end{aligned}$$

Die Abbildung 15 zeigt das Richtungsfeld, den kritischen Punkt $(0|0)$ und einige Lösungskurven.

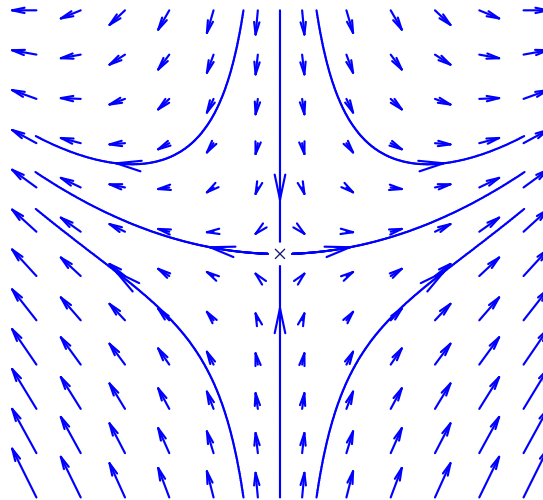


Abbildung 15: Ein kritischer Punkt vom Typ Sattelpunkt

Es gibt zwei besondere Kurven durch den Nullpunkt: Eine ist die Gerade $x = 0$, also die y -Achse. Wählt man als Startpunkt einen vom Nullpunkt verschiedenen Punkt der y -Achse, bewegt man sich mit der Zeit auf den Nullpunkt zu, erreicht ihn aber nicht in endlicher Zeit. Die andere ist die Kurve, die wie eine Parabel aussieht⁹. Wählt man als Startpunkt einen vom Nullpunkt verschiedenen Punkt auf dieser Kurve, bewegt man sich vom Nullpunkt weg. Die eine Kurve heißt stabile Mannigfaltigkeit, die andere instabile Mannigfaltigkeit des Sattelpunktes.

Lösungskurven zu Startpunkten $\neq (0|0)$, die nicht auf einer der beiden Kurven liegen, sind hyperbelartig, die Äste schmiegen sich an die y -Achse und an die Parabel an.

Wenn man etwas Theorie¹⁰ zur Hand hat, kann mit Hilfe von Linearisierung rechnerisch feststellen, dass ein Sattelpunkt vorliegt und dass die x - bzw. die y -Achse Tangente an die instabile bzw. die stabile Mannigfaltigkeit ist. Gegebenfalls kann ich dazu etwas sagen.

⁸Jetschke, Gleichung (1.26) auf Seite 48 und Abbildung 16b auf Seite 47

⁹Es ist auch eine, aber das ist nicht ohne weiteres zu sehen.

¹⁰partielle Ableitungen, Eigenwerte von Matrizen

1.7 Zum praktischen Gebrauch numerischer Verfahren

Wir wollen uns zum Rats-and-Cats-Beispiel [Enns, S. 36 und S. 40] mit numerischen Mitteln näherungsweise Lösungskurven verschaffen. Das Euler-Cauchy-Verfahren liefert mit dem Startpunkt (5|6) und 100 Schritten der Schrittweite $\Delta t = 0.01$ diese Kurve hier:

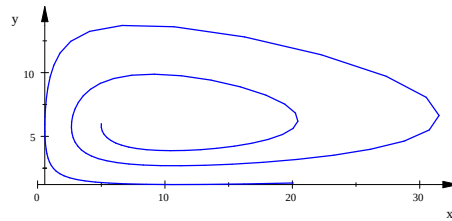


Abbildung 16: Näherungslösung zum Beispiel „Rats and Cats“, Euler-Cauchy-Verfahren, $\Delta t = 0.1$, $n = 100$

Das Ergebnis passt nicht so gut zu unseren Erwartungen. Also ändern wir die Vorgaben. Den Startpunkt halten wir fest, aber wir verkleinern die Schrittweite auf den vierten Teil und vervierfachen die Anzahl der Schritte. Das Ergebnis sieht nun so aus:

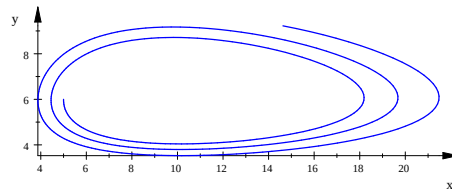


Abbildung 17: Neue Näherungskurve, Euler-Cauchy-Verfahren, kleinere Schrittweite $\Delta t = 0.025$, $n = 400$ Schritte

Wir verkleinern die Schrittweite auf den vierten Teil und vervierfachen die Anzahl der Schritte zweimal. Das ergibt die folgenden Kurven.

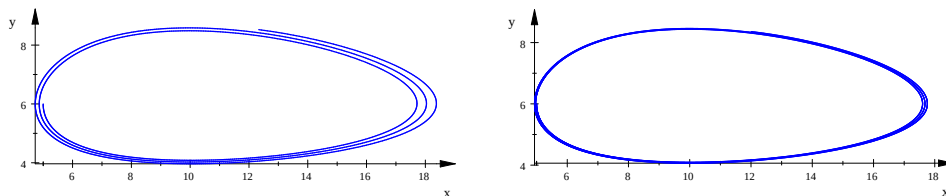


Abbildung 18: Schrittweiten $\Delta t = 0.0125$ (links) und $\Delta t = 0.00625$ (rechts)

Nach diesen Versuchen lassen wir uns die Kurve mit $n = 10000$ Schritten der Schrittweite $\Delta t = 0.001$ zeichnen und sehen diese als akzeptables Ergebnis an. Es handelt sich scheinbar um eine geschlossene Bahnkurve.

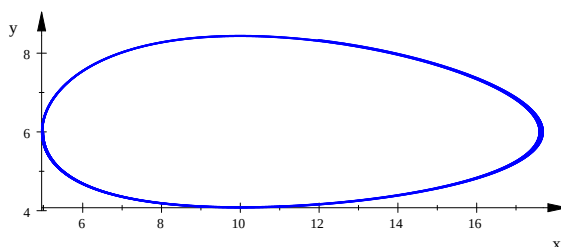


Abbildung 19: Näherungslösung zum Beispiel „Rats and Cats“, Euler–Cauchy–Verfahren, $\Delta t = 0.001$, $n = 10000$

Das Euler–Cauchy–Verfahren ist leicht zu verstehen, und in der Tat „konvergieren“ die Näherungskurven gegen die richtige Lösungskurve, wenn die Schrittweite gegen Null strebt, aber es ist eben kein sehr effizientes Verfahren. In der Praxis nimmt man etwas ausgefuchstere Werkzeuge, beispielsweise das klassische Runge–Kutta–Verfahren. Mit diesem sind die folgenden praktisch brauchbaren Bilder erstellt.

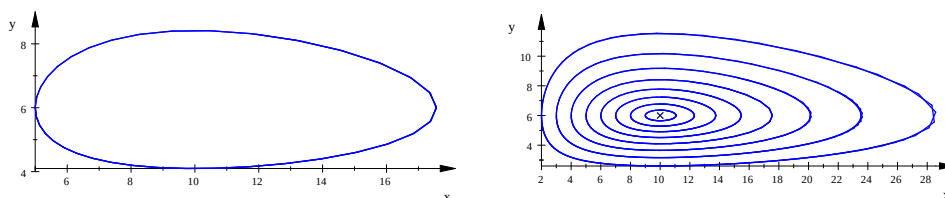


Abbildung 20: Näherungslösung zum Beispiel „Rats and Cats“, klassisches Runge–Kutta–Verfahren, $n = 100$, $\Delta t = 0.1$. Das rechte Bild zeigt eine Schar von Kurven, Startpunkte $(2|5), (3|5), \dots, (9|5)$

Wie erkennt man, dass die Schrittweite genügend klein ist? Man nimmt an, dass das Ergebnis in Ordnung ist, wenn es sich bei weiterer Verkleinerung der Schrittweite nicht mehr ändert. Das ist aber nur eine Faustregel für die Praxis, kein mathematischer Satz.

2 Gewichtiges Beispiel: Das Pendel

2.1 Das Pendel und seine Differentialgleichung

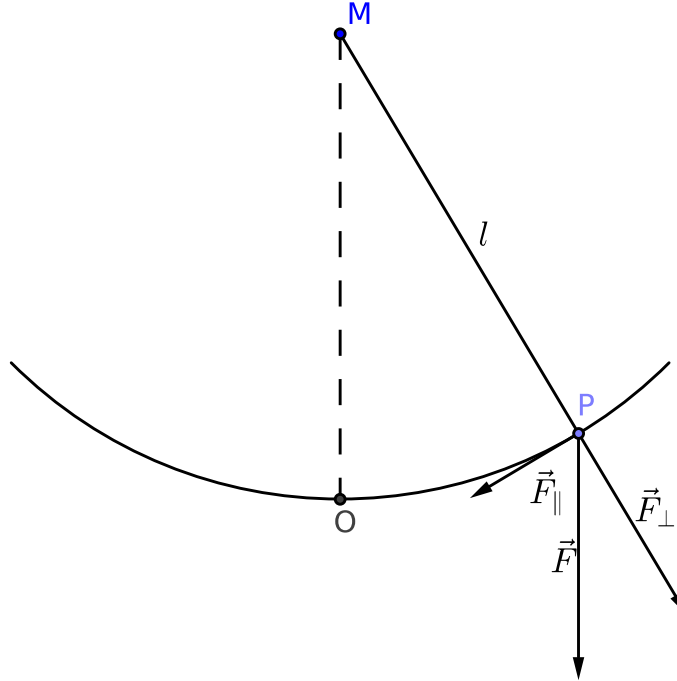


Abbildung 21: Mathematisches Pendel

Ein Pendel brauche ich nicht groß zu erklären, das ist ein Gegenstand aus dem Alltag. In der Abbildung 21 sind die nötigen Bezeichnungen festgelegt. Der Massenpunkt P bewegt sich auf einer Kreislinie mit dem Radius l um das Zentrum M ; wir denken uns den Punkt aber nicht an einem Faden aufgehängt, sondern an einer (masselosen) Stange, und wir lassen auch zu, dass das Pendel über Kopf geht. Der Punkt P soll in einer festen vertikalen Ebene schwingen; wenn das Pendel in Ruhe ist, ist $P = O$.

Um den Ort, an dem sich P gerade befindet, zu beschreiben, denken wir uns die Kreislinie mit einer Längenskala versehen. Die Nullmarke ist natürlich in O . Von O aus gegen den Uhrzeigersinn rechnen wir positiv, im Uhrzeigersinn negativ. Wir setzen anstandslos $l = 1$, dann bekommt der Punkt Z , in dem die Gerade MO die Kreislinie schneidet, die Werte π und $-\pi$. Das macht nichts. Überhaupt identifizieren wir die Skalenwerte x und $x + k \cdot 2\pi$ für ganze Zahlen k . So sagen wir, wenn $x(t_0) = x_0$ ist und das Pendel in der Zeit von t_0 bis t_1 drei Runden gegen den Uhrzeigersinn gemacht hat, es sei $x(t_1) = x_0 + 6\pi$. Der Punkt P befindet sich zur Zeit t_1 aber wieder an der gleichen Stelle wie zur Zeit t_0 . – Ich denke, das macht keine Probleme.

Beschaffen wir uns die Differentialgleichung. Der Massenpunkt erfährt im Schwerfeld der Erde eine Gewichtskraft $\vec{F}$, die auf den Erdmittelpunkt gerichtet ist, der Kraftpfeil ist also parallel zur Geraden MO . Wir zerlegen $\vec{F}$ in eine Komponente $\vec{F}_{\parallel}$, die tangential zur Kreislinie verläuft, und eine Komponente $\vec{F}_{\perp}$ in Richtung der Geraden OP . Es ist also

$$\vec{F} = \vec{F}_{\parallel} + \vec{F}_{\perp} \quad .$$

Nur $\vec{F}_{\parallel}$ beeinflusst die Bewegung des Massenpunktes, die andere Kraft $\vec{F}_{\perp}$ zieht nur an der Stange, und wir gehen davon aus, dass die Stange nicht das kleinste bißchen nachgibt¹¹, so dass P brav auf der Kreislinie bleibt.

Den Betrag von $\vec{F}_{\parallel}$ bekommen wir, indem wir den Betrag der Gewichtskraft $\vec{F}$ mit dem Sinus des Winkels zwischen $\vec{F}$ und $\vec{F}_{\perp}$ multiplizieren. Dieser Winkel ist gleich dem Schnittwinkel der Geraden MO und MP , sein Bogenmaß ist also genau der Skalenwert x , der die Lage von P beschreibt. Auf die Richtung von $\vec{F}_{\parallel}$ müssen wir auch achten. Für $0 \leq x \leq \pi$ wirkt die Kraft in Richtung kleinerer x , für $-\pi < x < 0$ in Richtung grösserer. Jetzt liefert uns Newtons goldene Regel die gewünschte Differentialgleichung:

$$\ddot{x} = -\sin(x)$$

Dummerweise ist das eine Differentialgleichung zweiter Ordnung, und die passt nicht zu unserer Theorie. Aber es gibt einen Kunstgriff, der das in Ordnung bringt. Wir setzen $y = \dot{x}$, dann bekommen wir ein schönes System von Differentialgleichungen erster Ordnung, und damit können wir umgehen. Es sieht so aus:

$$\dot{x} = y \tag{8}$$

$$\dot{y} = -\sin(x) \tag{9}$$

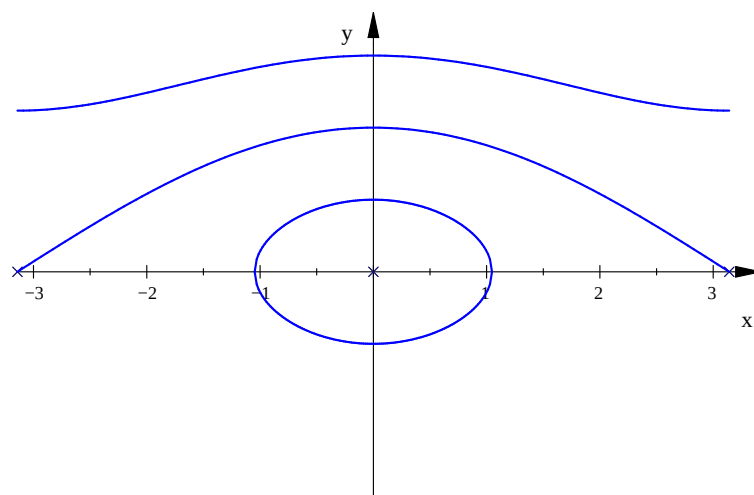
2.2 Untersuchung der Differentialgleichung des Pendels

Wir lassen die übliche Routine laufen: Die kritischen Punkte sind leicht zu berechnen, es sind

$$(0|0), (\pm\pi|0), (\pm2\pi|0), (\pm3\pi|0), \dots \tag{10}$$

Auf den nächsten beiden Seiten findest du einige Bilder.¹²

Aufgabe Wieviele Bahnen findest du in dieser Abbildung von Lösungskurven des Pendeldifferentialgleichungssystems?



¹¹was nach dem Hookeschen Gesetz streng genommen nicht möglich ist

¹²pendex.mn

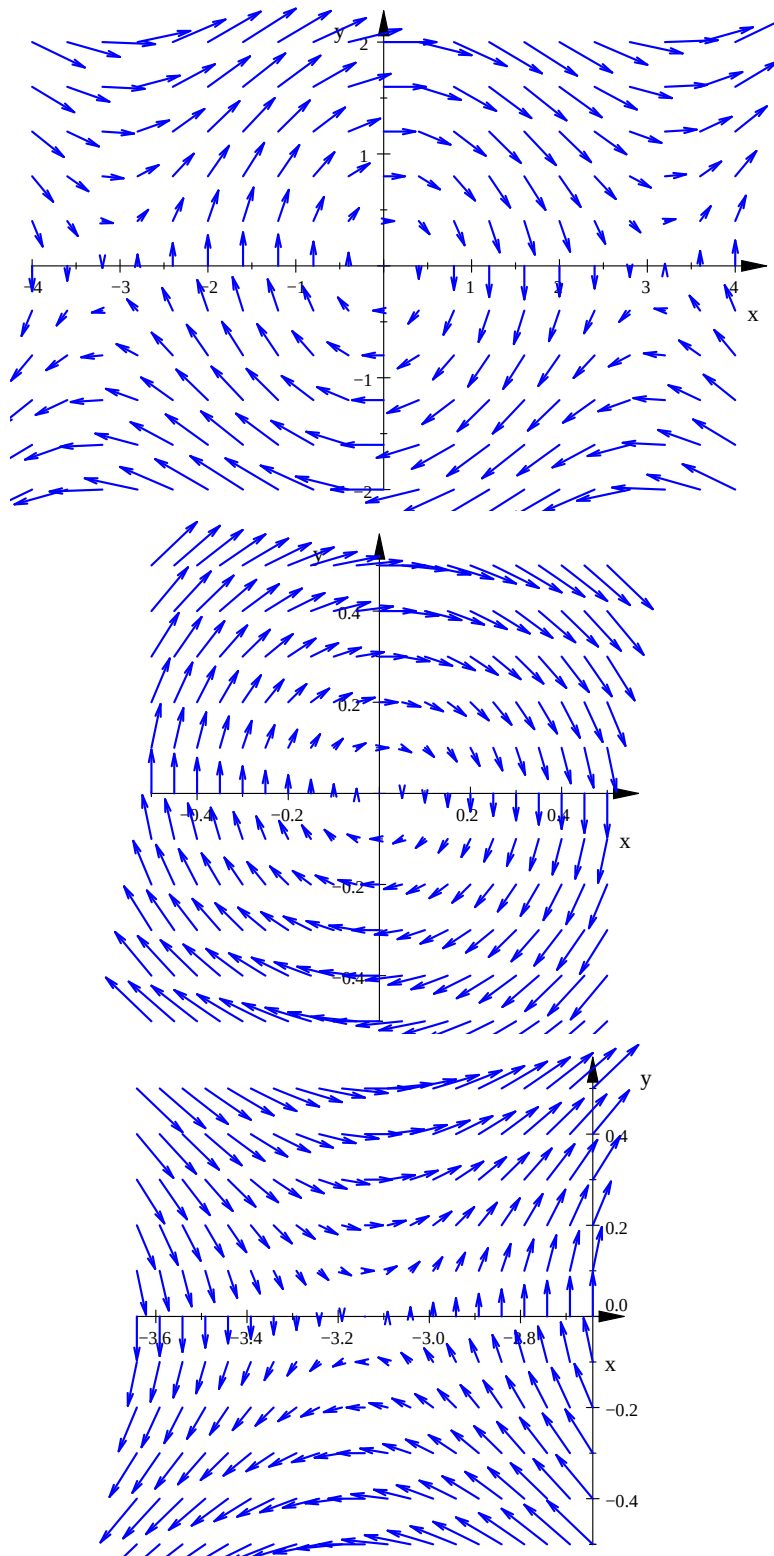


Abbildung 22: Richtungsfeld des Pendeldifferentialgleichungssystems

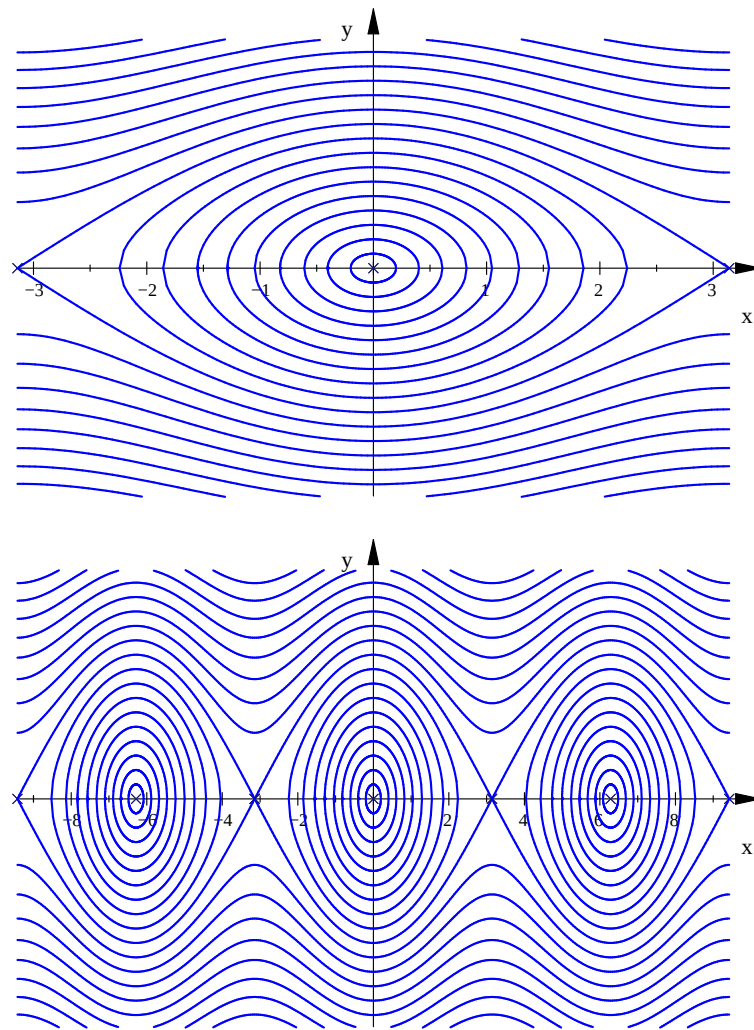


Abbildung 23: Phasenportrait des Pendels

Am besten wäre, man klebte das obere Bild auf einen Zylinder mit dem Umfang 2π . Im unteren Bild muss man Punkte identifizieren, deren x -Koordinaten sich nur um ganzzahlige Vielfache von 2π unterscheiden.

2.3 Noch ein Blick auf das Phasenportrait des Pendels

Eine kleine Aufgabe: Wenn du genau hinschaust, findest du in der schon bekannten Abbildung des Phasenportraits des Pendelsystems vier markierte Punkte. Durch jeden Punkt des Phasenraums geht immer genau eine Lösungskurve. Beschreibe zu jedem der markierten Punkte die Lösungskurve und den Bewegungsablauf des Pendels.

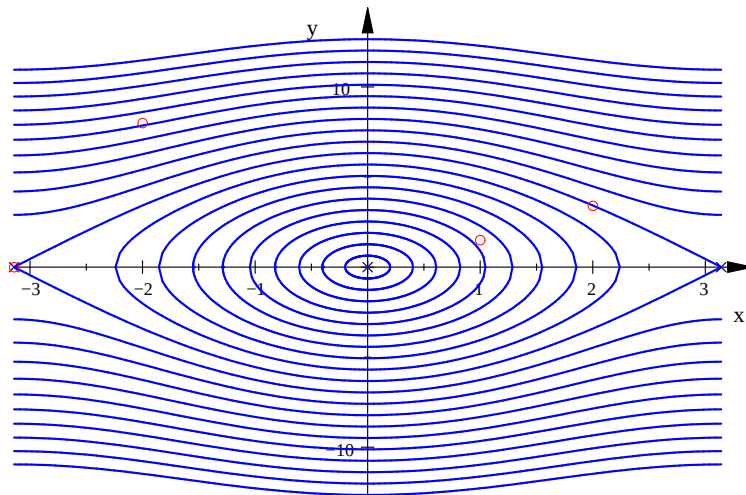


Abbildung 24: Phasenportrait des Pendels mit ausgewählten Punkten

2.4 Das gestörte Pendel

In einem Vortrag über unser Thema macht Professor Enß¹³ einen Gedankenversuch: Er bringt das Pendel zwischen die Platten eines Kondensators. Er legt an die Kondensatorplatten eine Wechselspannung

$$U(t) = U_0 \cos(\omega t)$$

und bringt eine kleine Ladung auf den Massenpunkt. Dieser erfährt nun zusätzlich zu seiner Gewichtskraft, die wir schon betrachtet haben, eine horizontal gerichtete Kraft durch das Feld des Kondensators. Die neue Anordnung sieht nun so aus:

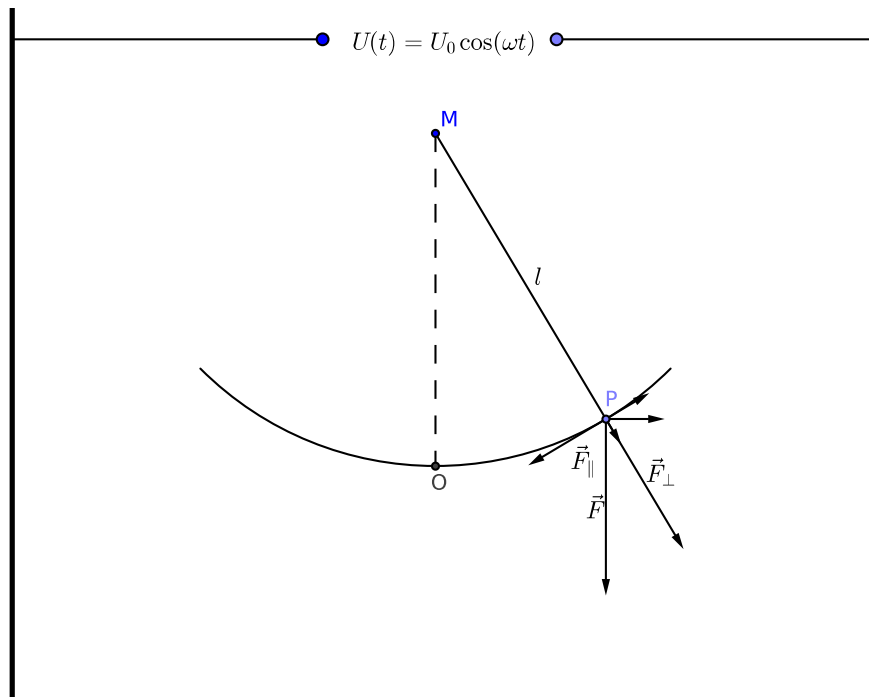


Abbildung 25: Pendel im Feld eines Plattenkondensators

Die elektrische Kraft $\vec{F}_{el}$ ist durch den horizontalen Pfeil dargestellt, der in P beginnt. Wir müssen auch die elektrische Kraft in eine tangentielle Komponente und eine radiale Komponente zerlegen, und nur die tangentielle Komponente beeinflusst die Bewegung des Massenpunkts. Da der Winkel zwischen der elektrischen Kraft und der Tangente an den Kreis in P wieder das Bogenmaß x hat, ist der Betrag der tangentialen Komponente

$$F_{el} \cos(x) = F_0 \cos(\omega t) \cos(x) \quad ,$$

so dass wir für das gestörte Pendel die Differentialgleichung

$$\ddot{x} = -\sin(x) + \mu \cos(\omega t) \cos(x) \quad (11)$$

erhalten. Die führt nun zu dem System

$$\dot{x} = y \quad (12)$$

$$\dot{y} = -\sin(x) + \mu \cos(\omega t) \cos(x) \quad (13)$$

¹³Als Anlage bekommst du einen Ausdruck des Vortragstextes, siehe dort Seite 9

von Differentialgleichungen erster Ordnung, das wieder die vertraute Form hat.

Ich habe mit den Werten $\mu = 0.05$ und $\omega = 0.316227766$ mit dem klassischen Runge–Kutta–Verfahren Näherungslösungen berechnet, und zwar zu den Startwerten

$$\begin{pmatrix} -3.135 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \begin{pmatrix} -3.1366 \\ 0 \end{pmatrix}$$

des Phasenraums, jeweils 10000 Schritte der Schrittweite 0.05. Hier sind die Ergebnisse in ty -Schaubildern: an der Rechtsachse ist die Zeit t angetragen, an der Hochachse die Geschwindigkeit $v = \dot{x} = y$ des Massenpunkts.

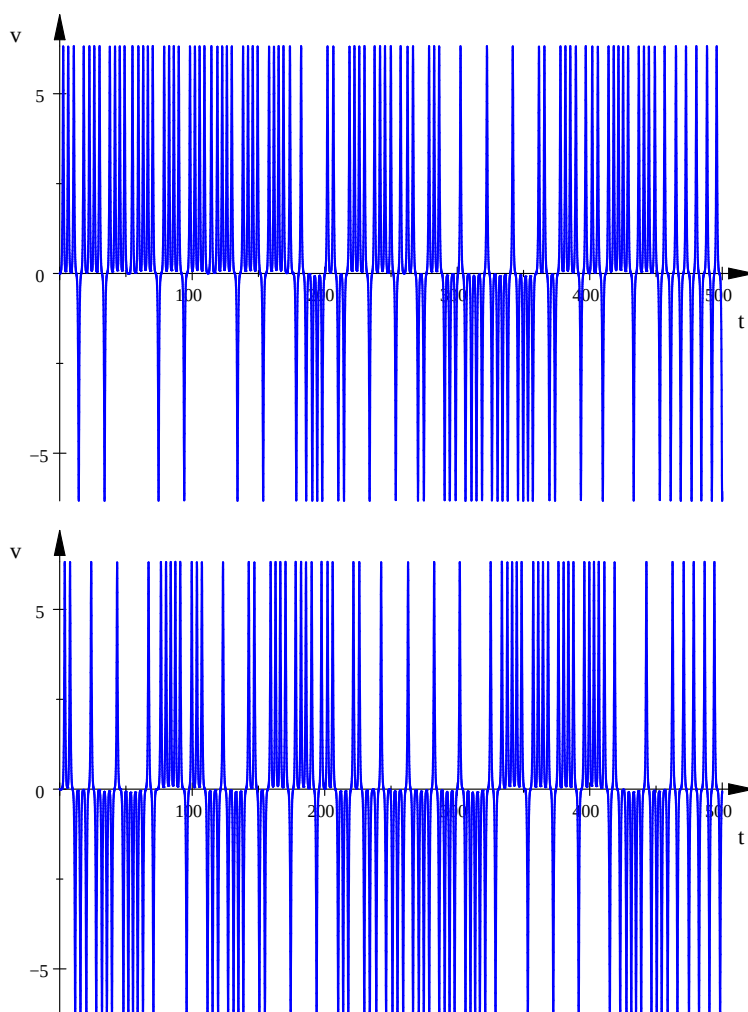


Abbildung 26: Geschwindigkeit des Massenpunkts bei zwei Versuchen mit nahe beieinanderliegenden Startpunkten

Völlig andere Bilder bekommt man bei den Startwerten

$$\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{bzw.} \quad \begin{pmatrix} -1.1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 8 \end{pmatrix} \quad \text{bzw.} \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 8.1 \end{pmatrix},$$

die in Abbildung 27 zu sehen sind. Hier habe ich nur 1000 Schritte der Schrittweite 0.05 rechnen lassen, sonst war nichts mehr zu erkennen. Schau dir die Abbildungen an und ziehe deine Schlüsse! Wie laufen die Bewegungen ab?

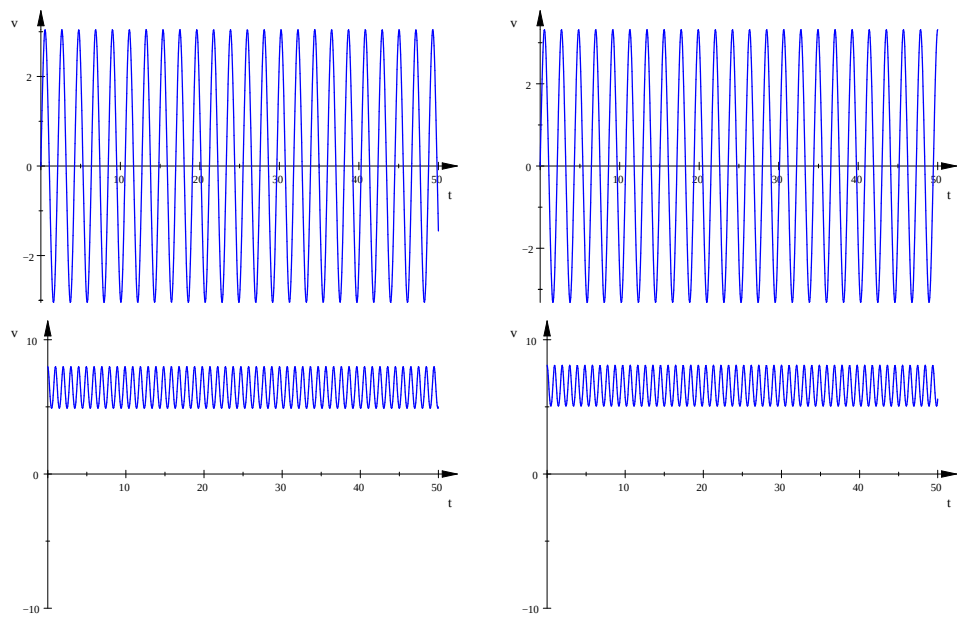


Abbildung 27: ty -Schaubilder zu zwei anderen Paaren nahe beieinanderliegender Startwerte

3 Genauigkeitsfragen

Bildet man einen realen Vorgang mit Hilfe eines Dynamischen Systems nach, wird man immer der Frage Beachtung schenken müssen, wie sich Ungenauigkeiten auswirken. Werte erscheinen im Modell als scharfe reelle Zahlen, sie sind aber stets mit Messfehlern behaftet, und es gibt sie ohnehin nur mit einer begrenzten Stellenzahl. Und wenn man die Differentialgleichung aufstellt, vereinfacht man in aller Regel. Man wünscht sich, dass die Lösung dennoch ungefähr passt! Häufig klappt das, manchmal nur in gewissen Grenzen. Es kommt aber auch vor, dass kleine Änderungen der Gleichung oder des Startwerts zu gravierenden Veränderungen der Lösung führen.

3.1 Einfluss des Startwerts

Wir erinnern uns an das Pendel. Schwingt es nur wenig um die Ruhelage oder hat es so viel Energie, dass es über Kopf geht und dabei noch ordentlich Geschwindigkeit hat, bleibt bei kleinen Änderungen des Startwertes wenigstens das Erscheinungsbild erhalten. Anders ist die Sache, wenn das Pendel aufrecht steht oder wenn es soviel Energie hat, dass es gerade oder gerade nicht über Kopf geht. Da kann eine kleine Änderung des Startwertes zu einem gänzlich anderen Ablauf führen, und man muss sehr aufpassen, in welcher Gegend des Phasenportraits der Startwert liegt.

Aber es gibt grundsätzlich ein fatales Problem, das ich an einem einfachen Beispiel demonstrieren möchte. Wir nehmen die harmlose Gleichung

$$\dot{x} = x$$

und fragen nach dem Unterschied der Lösungen zu den Startwerten $x(0) = 1$ und $x(0) = 1 + \epsilon$. Die Lösungen kann man hinschreiben, es sind

$$x(t) = e^t \quad \text{bzw.} \quad x(t) = (1 + \epsilon)e^t .$$

Die Differenz ist

$$\epsilon e^t .$$

Damit ist klar, dass die Differenz der beiden Lösungen bei noch so kleinem $\epsilon > 0$ auf lange Sicht über alle Grenzen wächst.

3.2 Auswirkung von Parametern in der Gleichung

Nehmen wir als Beispiel

$$\dot{x} = x(x^2 - k) .$$

Kritische Punkte sind 0 und die Nullstellen von $x^2 - k$, für $k > 0$ also $\pm\sqrt{k}$. Das kx -Schaubild in Abbildung 28 zeigt, wie die kritischen Punkte der Gleichung von k abhängen. Kleine Änderungen von k können dazu führen, dass sich der Charakter der Lösung völlig verändert. Man spricht von „Bifurkation“; in diesem Beispiel hier sehen wir eine so genannte „pitchfork-Bifurkation“.

3.3 Vereinfachungen der Gleichung

Ein Beispiel: Da für betragsmäßig kleine x in guter Näherung $\sin(x) \approx x$ gilt, ersetzt man gern das System

$$\dot{x} = y \quad , \quad \dot{y} = -\sin(x)$$

des mathematischen Pendels durch das einfachere System

$$\dot{x} = y \quad , \quad \dot{y} = -x$$

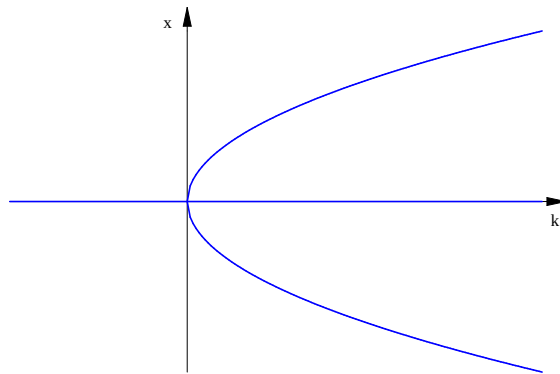


Abbildung 28: Kritische Punkte in Abhängigkeit von k

– das ist die Gleichung eines harmonischen Oszillators. Abbildung 29 zeigt eine Schar von Lösungskurven des Systems. Für Startwerte $(0, y_0)$ mit betragsmäßig kleinem y_0 stimmt der Charakter der Kurven, für große y_0 sind völlig falsch.

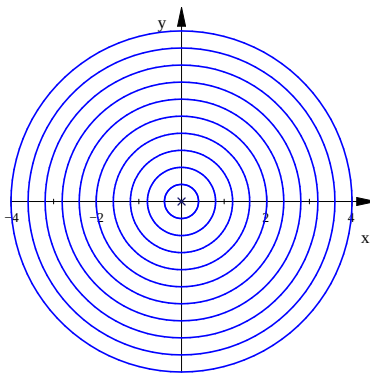


Abbildung 29: Schar von Lösungskurven zum harmonischen Oszillator

3.4 „Vorherbestimmt, aber nicht vorhersagbar“

Diese Formulierung habe ich dem Titel eines Vortrags entnommen, den der schon erwähnte Professor Enß vor einem Publikum interessierter Laien gehalten hat. Dort schildert er ein sehr eindrückliches Gedankenexperiment: Zwei Billardspieler stehen an einem perfekten Billardtisch, einer stößt eine Kugel. Durch die gegebenen Bedingungen ist der Lauf der Kugel völlig festgelegt. Wiederholt man den Versuch bei exakt gleichen Bedingungen, erhält man genau den gleichen Ablauf. Dass es technisch nicht möglich ist, die Startbedingungen exakt wieder herzustellen, interessiert uns nicht; wir machen ja ein Gedankenexperiment. Nun verändern wir die Bedingungen in einem winzigen Punkt. Bei der ersten Durchführung steht der Spieler, der nicht am Zug ist, auf derselben Seite des Tisches wie der, der den Stoß ausführt, bei der zweiten Durchführung stehen sie auf gegenüberliegenden Seiten des Tisches. Die winzige Gravitationskraft, die die Spieler auf die rollende Kugel ausüben, ist also bei den beiden Durchführungen unterschiedlich. Erstaunlicherweise¹⁴ „ist schon nach etwa 20 Zusammenstößen der Kugeln die weitere Bewegung deutlich verschieden [...] das idealisierte System, das stabil deterministisch ist, zeigt uns deutlich, daß eine Vorhersage für eine lange Zeitdauer, auch wenn sie prinzipiell möglich ist, doch eine Genauigkeit erfordert, die in der Praxis unerreichbar ist.“

Ich habe keinerlei Anlass, diese Aussage eines ausgewiesenen Experten auf dem Gebiet der Dynamischen Systeme in Zweifel zu ziehen. Im Gegenteil, es gibt andere Beispiele, die in die gleiche Richtung weisen. Eines der bekanntesten betrifft den Schmetterlingseffekt. Die winzige Änderung im System der Atmosphäre, die der Flügelschlag eines Schmetterlings hervorruft, führt nach erstaunlich kurzer Zeit zu einer deutlichen veränderten Entwicklung des Wettergeschehens. Dies macht langfristige Wettervorhersagen prinzipiell unmöglich, mehr als einige Wochen sind kaum drin. Und in welcher Weise sich das Wetter durch den Flügelschlag des Schmetterlings anders entwickelt, kann man sowieso nicht sagen.

¹⁴Enß, Seite 5

4 Himmelsmechanik

4.1 Ein Blick in die Geschichte

Das Geschehen am Himmel scheint in großer Regelmäßigkeit abzulaufen. Schon die Babylonier konnten, soweit ich weiß, astronomische Ereignisse vorhersagen, und zwar allein auf Grund von Beobachtungen; sie hatten keine Theorie dazu. Seit Kepler und Newton weiß man, dass sich die Erde auf einer elliptischen Bahn um die Sonne bewegt, die sich in einem der beiden Brennpunkte der Ellipse aufhält.

Das heißt: So ganz stimmt das nicht. Die Sonne kann nicht stillstehen, weil die Erde eine Anziehungskraft auf sie ausübt, wie die Sonne auf die Erde, aber da die Masse der Sonne viel, viel größer ist als die Masse der Erde, betrachtet man nur die Bewegung der Erde und vernachlässigt die Bewegung der Sonne. Wenn ich mich recht erinnere, liegt der Schwerpunkt des Systems Erde/Sonne im Inneren der Sonne.

Außerdem sind da noch die anderen Planeten, die Kräfte ausüben. Die Kräfte ergeben sich aus dem Newtonschen Grundgesetz der Mechanik aus Massen und Entfernungen. Im Prinzip kann man ein System von Differentialgleichungen erster Ordnung hinschreiben, das so viele Himmelskörper berücksichtigt, wie man mag. Allerdings bringt jeder Himmelskörper drei Orts- und drei Geschwindigkeitskoordinaten ins Spiel. Nimmt man nur die Sonne und fünf Planeten, braucht man einen Satz von 36 Werten, um den Zustand des Systems zu einem festen Zeitpunkt zu erfassen. Der Zustand des Systems ist also durch einen Punkt in einem 36-dimensionalen Raum beschrieben, und die zeitliche Entwicklung des Systems ergibt eine Kurve in diesem 36-dimensionalen Raum!

Scheinbar war man doch guten Mutes, dass man das Problem zufriedenstellend lösen könne. König Oskar von Norwegen und Schweden setzte einen Preis für denjenigen aus, der bis zum königlichen Geburtstag am 21. Januar 1889 das n -Körper-Problem löst: bei bekannten Startwerten die zeitliche Entwicklung von Orten und Geschwindigkeiten n gegebener Massen zu bestimmen, auf die nur die gegenseitigen Newtonschen Massenanziehungskräfte wirken. Man erhoffte sich daraus nämlich Auskunft über die Stabilität des Sonnensystems, das heißt, man wollte wissen, ob die Bewegung der Planeten um die Sonne für alle Zeit so weitergeht oder ob es zu Zusammenstößen kommt oder ob ein Planet einmal das Sonnensystem verlässt oder dergleichen. Man wusste, dass die Verhältnisse nicht völlig konstant sind: Die Bahn des Merkur um die Sonne ist ja näherungsweise eine Ellipse, und diese Ellipse dreht sich ganz allmählich, und zwar etwa um 1.5° in einhundert Jahren¹⁵ ...

Henri Poincaré reichte eine Arbeit zu dieser Preisfrage ein, und dieser Arbeit wurde auch der Preis zuerkannt. Sie war originell und voller neuer Ideen, aber sie enthielt keineswegs eine Lösung des n -Körper-Problems. Im Zuge seiner Untersuchung hatte Poincaré die Aufgabenstellung so stark vereinfacht, dass er nur noch von drei Körpern ausging, die sich in einer festen Ebene bewegen. Zwei Körper sollten eine große Masse haben; wie die sich unter der Wirkung der Anziehungskräfte bewegen, die sie aufeinander ausüben, lässt sich ausrechnen. Der dritte Körper sollte eine kleine Masse haben. Poincaré fragte, wie sich die Bewegung des kleinen Körpers unter dem Einfluss der Kräfte entwickelt, die die großen Körper auf ihn ausüben. Die Wirkung des kleinen Körpers auf die großen wird vernachlässigt. Nun stehen in der Rechnung nur noch vier Unbekannte: die zwei Orts- und die zwei Geschwindigkeitskoordinaten des kleinen Körpers. Die Bühne ist nun der $\mathbb{R}^4$. Und wenn man noch den Energiesatz ins Spiel bringt, nach dem die Gesamtenergie des Systems konstant ist, kann man eine der vier Unbekannten durch die übrigen drei ausdrücken. Die

¹⁵H. Broer, S. 202

Punkte zu den möglichen Zuständen der Werte $x, y, \dot{x}, \dot{y}$ (bei fester Gesamtenergie) gehören folglich zu einem dreidimensionalen Gebilde im vierdimensionalen Raum.

Poincaré musste erkennen, dass es in diesem doch so stark vereinfachten System unglaublich kompliziert zugehen kann, sogar chaotisch, würde man heute sagen, so dass eine Beschreibung der langfristigen zeitlichen Entwicklung im allgemeinen Fall unmöglich ist.¹⁶ Die Frage nach der Stabilität des Sonnensystems musste deshalb offen bleiben. Erst hundert Jahre später kam man mit Computerhilfe und numerischen Simulationen zu dem Schluss, dass eine chaotische Entwicklung durchaus möglich ist, das System aber in mit menschlichen Maßstäben gemessenen Zeiträumen stabil bleibt.¹⁷

¹⁶Es gibt einige Spezialfälle, deren Lösung man schon lange kennt, zum Beispiel einen, bei dem alle drei Massen gleich gross sind.

¹⁷Näheres findet man in dem Wikipediaeintrag zu Jacques Laskar, der solche Simulationen durchgeführt hat. Der Krimi um die Preisvergabe an Poincaré ist packend in dem Wikipediaeintrag zu Poincaré beschrieben.

4.2 Etwas über Poincarés neue Ideen

Mit den Mitteln und Techniken, die die bestehende Theorie der Differentialgleichungen bot, kam Poincaré dem Problem nicht bei, er musste sich etwas Neues ausdenken. Seine Ideen führten zu einer „qualitativen Theorie“¹⁸ der Differentialgleichungen“. Da konkrete Lösungen, sei es in geschlossener Form oder als Potenzreihen, nicht zu haben waren, fasste er die Gesamtheit aller Lösungen ins Auge¹⁹ und fragte zum Beispiel danach, ob es stationäre Lösungen gibt²⁰, ob es periodische Lösungen gibt, ob man sagen kann, wie sich das System auf lange Sicht verhält und ob zwei Lösungen einer Differentialgleichung, deren Startwerte benachbart sind, auf Dauer beieinanderbleiben. Mit solchen Fragen stieß er die Entwicklung der Theorie an, die heute „Dynamische Systeme“ genannt wird.

Zu dieser Theorie hat Poincaré wesentliche Beiträge geleistet. Ich versuche, ein Beispiel²¹ zu skizzieren: Wir gehen aus von der Anfangswertaufgabe

$$\dot{x} = P(x, y), \quad \dot{y} = Q(x, y), \quad x(0) = x_0, \quad y(0) = y_0 \quad .$$

Die Menge

$$\{ \gamma(t) := (x(t), y(t)) \mid t \geq 0 \}$$

ist gerade die Menge der Punkte der Lösungskurve ab dem Startpunkt. Wenn die Entfernung der Punkte vom Nullpunkt nicht über alle Grenzen wächst, tritt einer dieser vier Fälle ein:

1. Die Menge enthält nur einen einzigen Punkt, die Lösung ist stationär.
2. Der Punkt $\gamma(t)$ strebt für $t \rightarrow \infty$ gegen einen kritischen Punkt, jedoch ohne ihn in endlicher Zeit zu erreichen.
3. Die Menge bildet eine geschlossene Kurve, die Lösung ist periodisch.
4. Der Punkt $\gamma(t)$ strebt für $t \rightarrow \infty$ asymptotisch gegen eine geschlossene Kurve – einen Grenzzyklus.

Unser Beispielvorrat bietet mindestens einen Vertreter für jede dieser Möglichkeiten!

Besonderes interessiert war Poincaré an **periodischen Lösungen**.²² Solche boten ihm ein Einfallstor in die Festung, die allen direkten Angriffen standhielt. Dazu dachte er sich etwas aus, das heute Poincaré–Abbildung genannt wird. Ich werde versuchen, dazu etwas mit Händen und Füßen zu erklären; eine Beschreibung in diesem Skript muss ich mir jetzt versagen.

¹⁸Braun, Kapitel 4

¹⁹Phasenportraits hat sich Poincaré ausgedacht! – siehe Broer, Seite 201

²⁰Kritische Punkte!

²¹Jetschke, Satz 2 auf Seite 82

²²Es ist übrigens recht fahrlässig, eine Lösung für periodisch zu halten, wenn die markierten Pixel auf dem Bildschirm das Bild einer geschlossenen Kurve liefern – zeichnet man die Bahn des Merkurs über etwas mehr als ein Merkurjahr, dürfte die auf dem Bildschirm auch ziemlich geschlossen aussehen.

4.3 Nachtrag: Poincaré–Abbildung

Wir brauchen nun ein System mit drei Parametern, weil in Poincarés Vereinfachung noch die Parameter x, y und $\dot{x}$ auftraten – das $\dot{x}$ repräsentieren wir durch die Koordinate z . Eine Bahn des kleinen Körpers in Poincarés Dreikörperproblem wird jetzt durch eine Kurve im Raum beschrieben.

Abbildung 30 zeigt eine periodische Bahn und ein ebenes Flächenstück S , das von der Bahn in einem Punkt P geschnitten wird. Die Bahn darf in P keinesfalls tangential zu der Fläche sein.

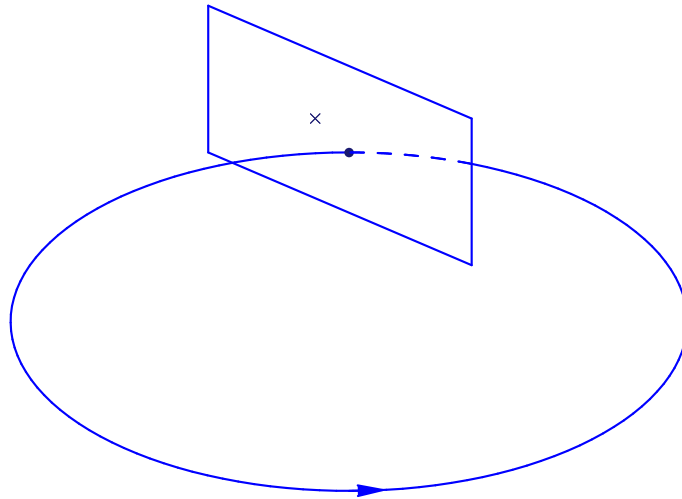


Abbildung 30: Periodische Bahn im Raum, die eine Fläche durchdringt

Wir betrachten nun einen weiteren Punkt Q von S , zum Beispiel den, der in der Zeichnung durch ein Kreuz dargestellt ist. Liegt Q nahe genug bei P , gibt es auch eine Lösungskurve, die in Q beginnt, und die so nah bei der periodischen Bahn verläuft, dass sie ebenfalls wieder die Fläche S schneidet, meinetwegen in einem Punkt Q^* . In ihrem weiteren Verlauf mag die neue Lösungskurve die Fläche S noch mehrfach schneiden, diese neuen Schnittpunkte interessieren uns aber nicht; Q^* soll der Punkt sein, in dem die Lösungskurve die Fläche S zum ersten Mal wieder erreicht.

Auf diese Weise ist jedem Punkt Q von S , der in einer kleinen Umgebung von P liegt, ein Punkt Q^* aus S zugeordnet. Das heißt, es gibt eine Abbildung

$$\sigma : Q \mapsto Q^* ,$$

die jedem Punkt Q aus S , der nahe genug bei P liegt, seinen Bildpunkt Q^* zuordnet, in dem die Lösungskurve, die in Q beginnt, das erste Mal wieder S erreicht. Diese Abbildung σ ist die Poincaré–Abbildung.

Die Poincaré–Abbildung ist im konkreten Fall leichter ausgedacht als ausgerechnet. Aber viele Jahre nach Poincaré hat dessen Landsmann Michel Hénon solche Abbildungen bestimmt. Schaut man sich graphische Darstellungen an, die die Wirkung der Abbildung zeigen, erkennt man, was Poincaré schon wusste: Schon ganz nah bei einer periodischen Bahn können die Verhältnisse so kompliziert sein, dass man kaum hoffen kann, auch nur das vereinfachte Dreikörperproblem vollständig zu lösen, ganz zu schweigen von dem Problem, die zeitliche Entwicklung des Sonnensystems bis in ferne Zukunft vorauszuberechnen. Immerhin gibt es numerische

Simulationen Jacques Laskars, die aussagen sollen, dass in den nächsten paar Millionen Jahren nichts Schlimmes passiert. Aber damit habe ich mich nicht mehr beschäftigt. Hier siehst du zum Abschluss einige Bilder zu Poincaré-Abbildungen nach Hénon. Die schönen Simulationen, in denen MuPAD zu einem vorgegebenen Punkt die Punkte nach und nach erscheinen lässt, die man erhält, wenn man die Poincaré-Abbildung wieder und wieder anwendet, kann ich im Skript leider nicht zeigen, da müsstet ihr das MuPAD-Arbeitsblatt `henon.mn` schon selbst zu Hause ausführen lassen. Die Bilder hier zeigen Startpunkte und immer gleich eine ganze Anzahl von Folgepunkten. Die Daten und die Rechnung findest du in der Datei `henon.mn`. Die verwendete Abbildung²³ ist

$$\sigma : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + x^2 \begin{pmatrix} \sin(\alpha) \\ -\cos(\alpha) \end{pmatrix}$$

mit $\alpha = \frac{76.11}{360} \cdot 2\pi$.

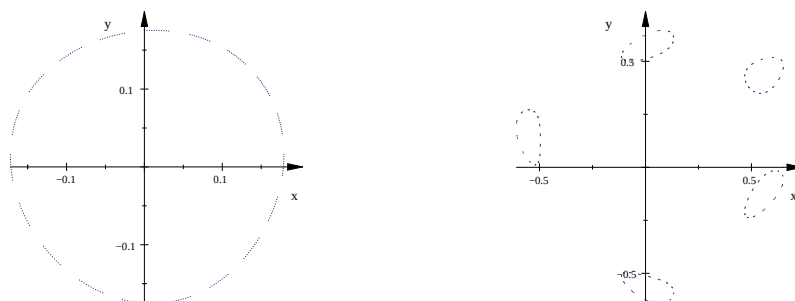


Abbildung 31: Zwei Startpunkte mit jeweils 200 Folgepunkten

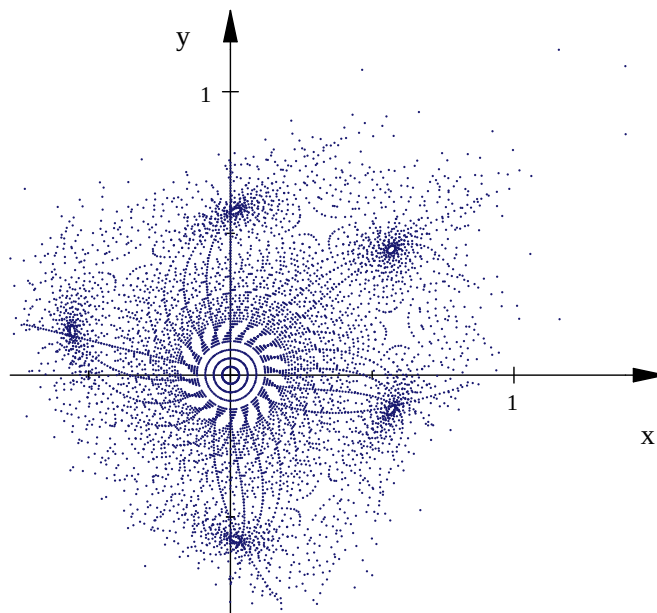


Abbildung 32: Sechshundsechzig Startpunkte mit jeweils 100 Folgepunkten

²³nach Ekeland Seite 58

5 Literatur

Im Text sind folgende Quellen erwähnt:

1. Martin Braun, Differentialgleichungen und ihre Anwendungen. Springer, Berlin Heidelberg New York 1979
2. Henk Broer, Perspectives on the legacy of Poincaré in the field of dynamical systems. NAW 5/13 nr. 3 september 2012, 201–206. Bequem zu finden unter dieser Adresse: www.nieuwarchief.nl/serie5/pdf/naw5-2012-13-3-201.pdf
3. Henk Broer und Floris Takens, Dynamical Systems and Chaos. Springer, New York Dordrecht Heidelberg London 2010
4. Ivar Ekeland, Das Vorhersehbare und das Unvorhersehbare. Harnack 1985
5. Richard H. Enns, It's a Nonlinear World. Springer, New York Dordrecht Heidelberg London 2010
6. Volker Enß, Das Pendel im Gezeitenhub – alles vorherbestimmt und doch nicht vorhersagbar. Vortrag vor der Urania in Berlin, erschienen in einer älteren Ausgabe von Behrends u. a., Alles Mathematik, erst Vieweg, dann Springer. Ich habe den Text von der Seite des Verfassers am Institut für Reine und Angewandte Mathematik der RWTH Aachen heruntergeladen, die Seite ist inzwischen abgeschaltet. Meine pdf-Datei gebe ich auf Wunsch gern weiter.
7. Klaus Jänich, Analysis für Physiker und Ingenieure. Springer, Berlin Heidelberg usw. 1995
8. Gottfried Jetschke, Mathematik der Selbstorganisation. Vieweg, Braunschweig Wiesbaden 1989
9. Ferdinand Verhulst, Nonlinear Differential Equations and Dynamical Systems. Springer, Berlin Heidelberg 2000