

Minimalflächen

Henrik Schumacher

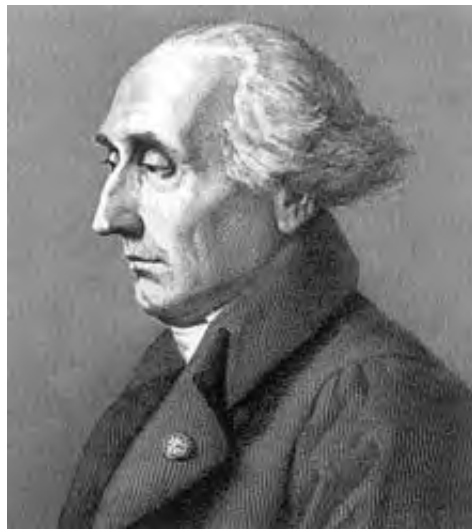
Institut für Numerische und Angewandte Mathematik, Göttingen

Espelkamp, 13. Juni 2015

Das Plateau-Problem

Was sind Minimalflächen?

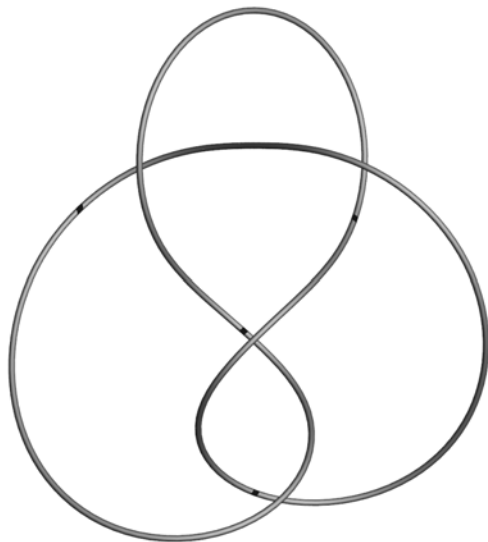
Ungefähr 1760 stellte sich der berühmte Mathematiker Joseph-Louis Lagrange folgende Frage:



Was sind Minimalflächen?

Ungefähr 1760 stellte sich der berühmte Mathematiker Joseph-Louis Lagrange folgende Frage:

Sei Γ eine geschlossene Kurve im Euklidischen Raum.

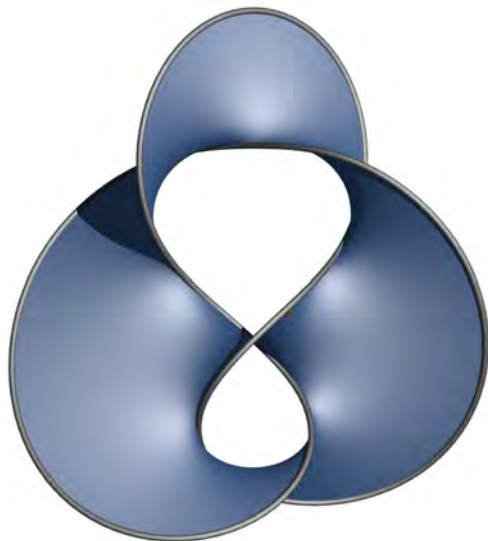


Was sind Minimalflächen?

Ungefähr 1760 stellte sich der berühmte Mathematiker Joseph-Louis Lagrange folgende Frage:

Sei Γ eine geschlossene Kurve im Euklidischen Raum.

Wie sieht diejenige in die Kurve gespannte Fläche aus, die den kleinstmöglichen Flächeninhalt hat?



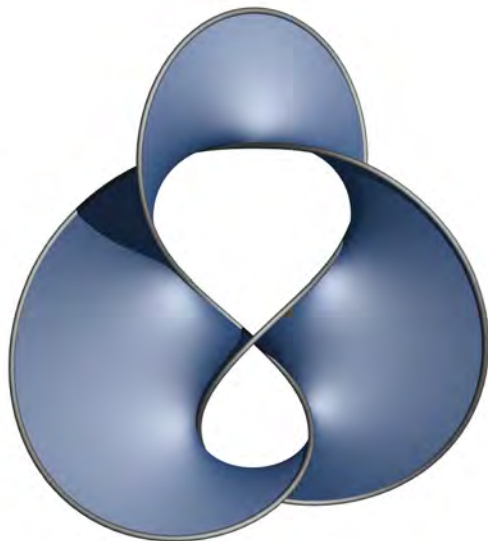
Was sind Minimalflächen?

Ungefähr 1760 stellte sich der berühmte Mathematiker Joseph-Louis Lagrange folgende Frage:

Sei Γ eine geschlossene Kurve im Euklidischen Raum.

Wie sieht diejenige in die Kurve gespannte Fläche aus, die den kleinstmöglichen Flächeninhalt hat?

Solche Flächen nennt man *Minimalflächen*.



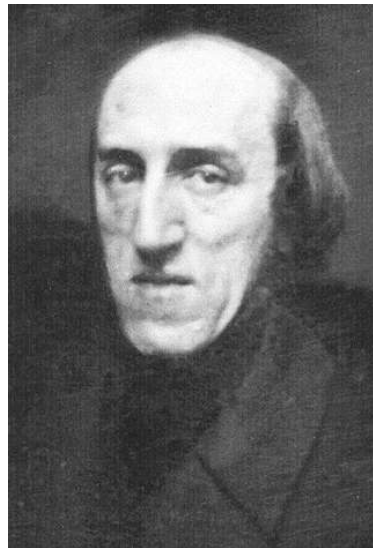
Das Plateau-Problem

Ein in eine Drahtschlinge eingespannter Seifenfilm wird versuchen, seine Oberfläche so gering wie möglich zu halten. Minimalflächen sind daher mathematische Modelle für Seifenhäute.

Das Plateau-Problem

Ein in eine Drahtschlinge eingespannter Seifenfilm wird versuchen, seine Oberfläche so gering wie möglich zu halten. Minimalflächen sind daher mathematische Modelle für Seifenhäute.

Im Jahr 1873 veröffentlichte der Physiker Joseph Antoine Ferdinand Plateau eine einflussreiche Arbeit über Oberflächenspannung und Seifenhäute.

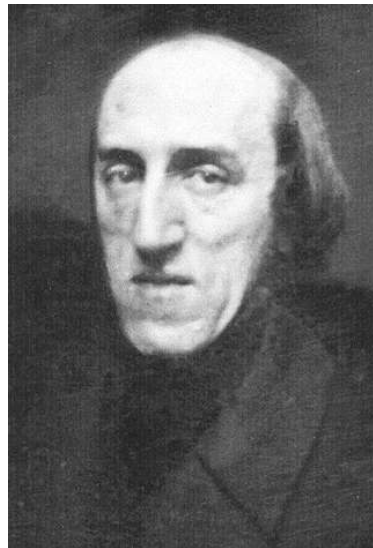


Das Plateau-Problem

Ein in eine Drahtschlinge eingespannter Seifenfilm wird versuchen, seine Oberfläche so gering wie möglich zu halten. Minimalflächen sind daher mathematische Modelle für Seifenhäute.

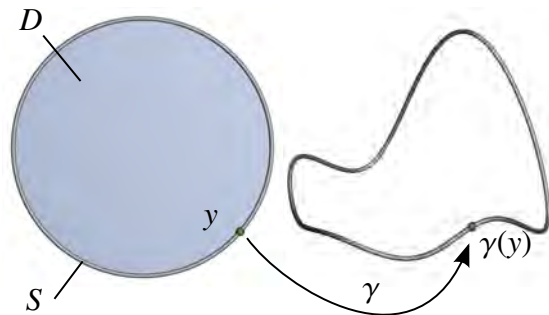
Im Jahr 1873 veröffentlichte der Physiker Joseph Antoine Ferdinand Plateau eine einflussreiche Arbeit über Oberflächenspannung und Seifenhäute.

Daher hat sich der Name *Plateau-Problem* für die Aufgabe, eine Minimalfläche mit vorgegebener Randkurve zu finden, eingebürgert.



Mathematische Formulierung I

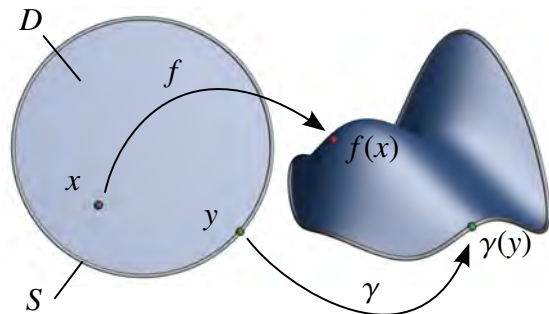
Eine geschlossene Kurve können wir beschreiben durch eine Funktion $\gamma: S \rightarrow \mathbb{R}^3$, die jedem Punkt y des Kreisrandes S einen Punkt im Raum zuweist.



Mathematische Formulierung I

Eine geschlossene Kurve können wir beschreiben durch eine Funktion $\gamma: S \rightarrow \mathbb{R}^3$, die jedem Punkt y des Kreisrandes S einen Punkt im Raum zuweist.

Eine Fläche beschreiben wir durch eine Funktion $f: D \rightarrow \mathbb{R}^3$, die jedem Punkt x der Einheitskreisscheibe D einen Punkt im Raum zuweist.

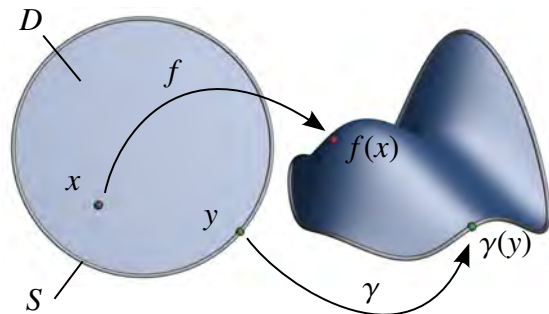


Mathematische Formulierung I

Eine geschlossene Kurve können wir beschreiben durch eine Funktion $\gamma: S \rightarrow \mathbb{R}^3$, die jedem Punkt y des Kreisrandes S einen Punkt im Raum zuweist.

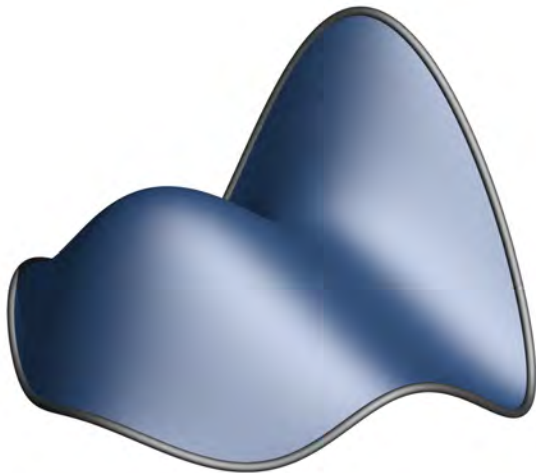
Eine Fläche beschreiben wir durch eine Funktion $f: D \rightarrow \mathbb{R}^3$, die jedem Punkt x der Einheitskreisscheibe D einen Punkt im Raum zuweist.

Wir sagen, f hat γ als Rand, wenn für jedes y in S gilt: $f(y) = \gamma(y)$.



Mathematische Formulierung II

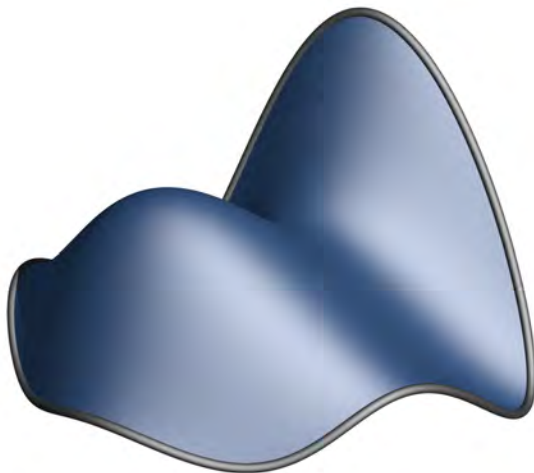
Sei eine geschlossene Kurve $\gamma: S \rightarrow \mathbb{R}^3$ gegeben.



Mathematische Formulierung II

Sei eine geschlossene Kurve $\gamma: S \rightarrow \mathbb{R}^3$ gegeben.

Wir bezeichnen die Gesamtheit aller Flächen $f: D \rightarrow \mathbb{R}^3$, die γ als Rand haben, mit $\mathcal{C}$.

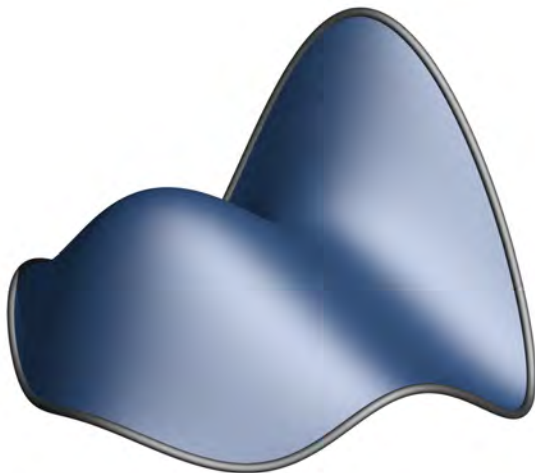


Mathematische Formulierung II

Sei eine geschlossene Kurve $\gamma: S \rightarrow \mathbb{R}^3$ gegeben.

Wir bezeichnen die Gesamtheit aller Flächen $f: D \rightarrow \mathbb{R}^3$, die γ als Rand haben, mit C .

Wir definieren die Funktion $A: C \rightarrow \mathbb{R}$, die jeder Fläche f ihren Flächeninhalt zuordnet.



Mathematische Formulierung II

Sei eine geschlossene Kurve $\gamma: S \rightarrow \mathbb{R}^3$ gegeben.

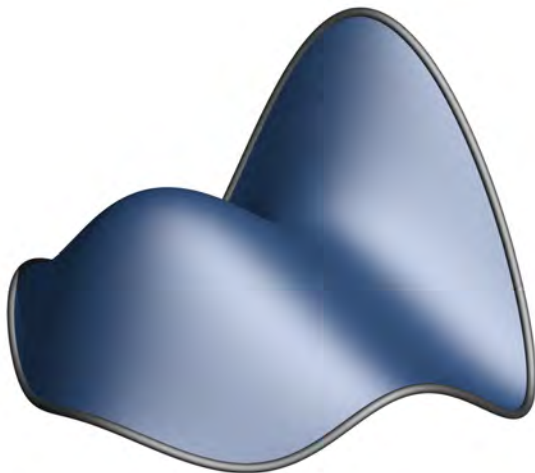
Wir bezeichnen die Gesamtheit aller Flächen $f: D \rightarrow \mathbb{R}^3$, die γ als Rand haben, mit C .

Wir definieren die Funktion $A: C \rightarrow \mathbb{R}$, die jeder Fläche f ihren Flächeninhalt zuordnet.

Das Plateau-Problem lässt sich jetzt mathematisch schreiben als:

Plateau-Problem

Minimiere die Funktion A auf C .



Mathematische Formulierung II

Sei eine geschlossene Kurve $\gamma: S \rightarrow \mathbb{R}^3$ gegeben.

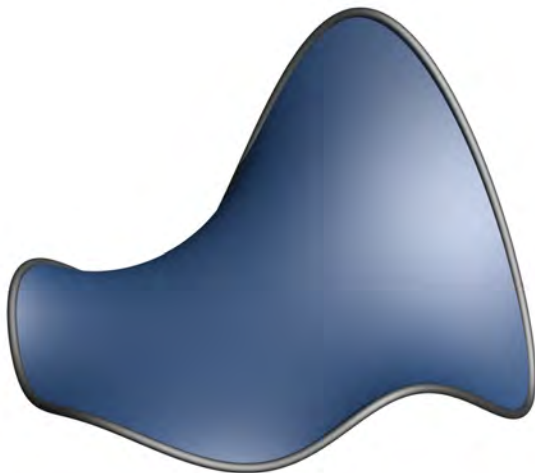
Wir bezeichnen die Gesamtheit aller Flächen $f: D \rightarrow \mathbb{R}^3$, die γ als Rand haben, mit C .

Wir definieren die Funktion $A: C \rightarrow \mathbb{R}$, die jeder Fläche f ihren Flächeninhalt zuordnet.

Das Plateau-Problem lässt sich jetzt mathematisch schreiben als:

Plateau-Problem

Minimiere die Funktion A auf C .



Der Existenzsatz für das Plateau-Problem I

Obwohl es schon 1760 formuliert wurde, und obwohl schon viele Beispiele von Lösungen bekannt waren, konnte man lange nicht beweisen, dass das Plateau-Problem immer auch eine Lösung besitzt.

Erst 1930 gelang dies den beiden Mathematikern *Jesse Douglas* und *Tibor Rado* (unabhängig voneinander).



Der Existenzsatz für das Plateau-Problem I

Obwohl es schon 1760 formuliert wurde, und obwohl schon viele Beispiele von Lösungen bekannt waren, konnte man lange nicht beweisen, dass das Plateau-Problem immer auch eine Lösung besitzt.

Erst 1930 gelang dies den beiden Mathematikern *Jesse Douglas* und *Tibor Rado* (unabhängig voneinander).

Douglas bekam dafür eine der ersten Fields-Medaillen verliehen.



Der Existenzsatz für das Plateau-Problem I

Obwohl es schon 1760 formuliert wurde, und obwohl schon viele Beispiele von Lösungen bekannt waren, konnte man lange nicht beweisen, dass das Plateau-Problem immer auch eine Lösung besitzt.

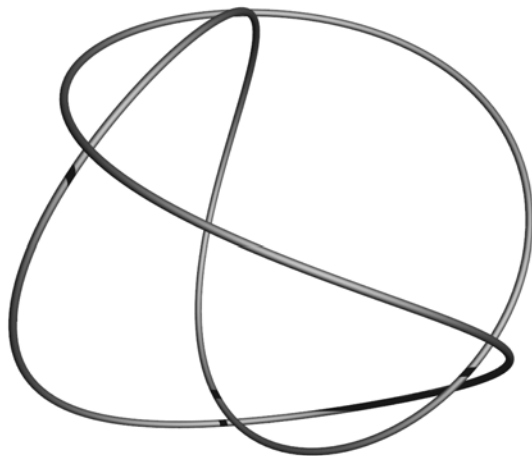
Erst 1930 gelang dies den beiden Mathematikern *Jesse Douglas* und *Tibor Rado* (unabhängig voneinander).

Douglas bekam dafür eine der ersten Fields-Medaillen verliehen. Rado nicht.



Der Existenzsatz für das Plateau-Problem II

Allerdings wird vom Existenzsatz nicht garantiert, dass die Minimalfläche physikalisch realisierbar ist.



Der Existenzsatz für das Plateau-Problem II

Allerdings wird vom Existenzsatz nicht garantiert, dass die Minimalfläche physikalisch realisierbar ist.

Z.B. kann sich die Minimalfläche selbst durchdringen.



Der Existenzsatz für das Plateau-Problem III

Warum ist der Existenzsatz denn so etwas besonderes?

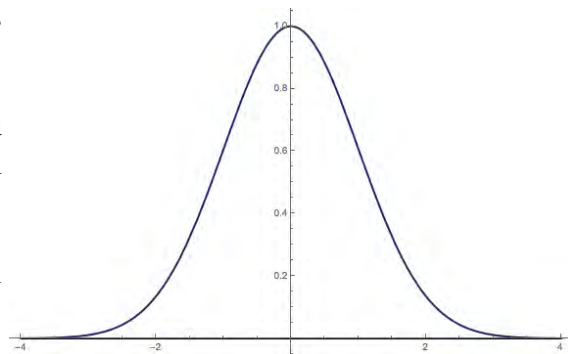
Für den Flächeninhalt gilt doch $A(f) \geq 0$ und eine Funktion mit Werten ≥ 0 muss doch ein Minimum besitzen!

Der Existenzsatz für das Plateau-Problem III

Warum ist der Existenzsatz denn so etwas besonderes?

Für den Flächeninhalt gilt doch $A(f) \geq 0$ und eine Funktion mit Werten ≥ 0 muss doch ein Minimum besitzen!

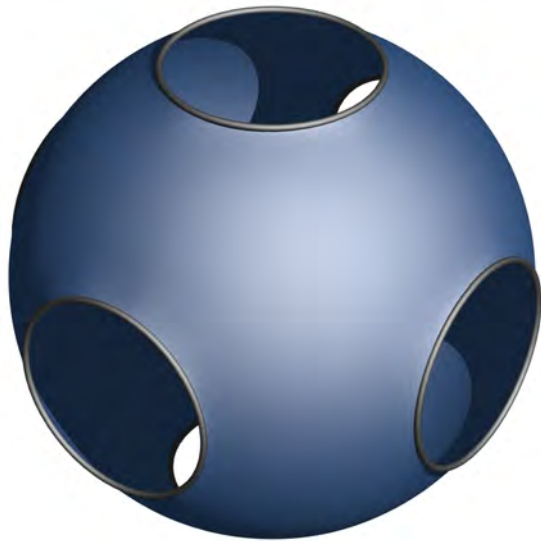
Aber nein, wie das nebenstehende Beispiel zeigt!



Nicht-Existenz

Außerdem garantiert der Existenzsatz nur die Existenz von Minimalflächen, die Bild einer Kreisscheibe sind.

Hat die Fläche Löcher und mehrere Randkomponenten so wie hier...



Nicht-Existenz

Außerdem garantiert der Existenzsatz nur die Existenz von Minimalflächen, die Bild einer Kreisscheibe sind.

Hat die Fläche Löcher und mehrere Randkomponenten so wie hier...

...so kann es Folgen von Flächen mit immer kleiner werdendem Flächeninhalt geben...

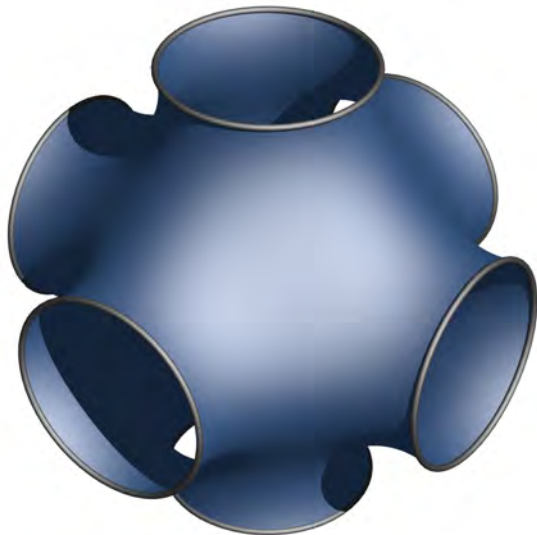


Nicht-Existenz

Außerdem garantiert der Existenzsatz nur die Existenz von Minimalflächen, die Bild einer Kreisscheibe sind.

Hat die Fläche Löcher und mehrere Randkomponenten so wie hier...

...so kann es Folgen von Flächen mit immer kleiner werdendem Flächeninhalt geben...

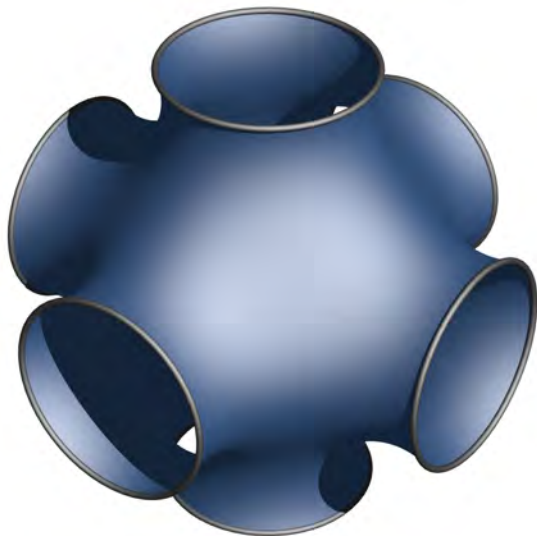


Nicht-Existenz

Außerdem garantiert der Existenzsatz nur die Existenz von Minimalflächen, die Bild einer Kreisscheibe sind.

Hat die Fläche Löcher und mehrere Randkomponenten so wie hier...

...so kann es Folgen von Flächen mit immer kleiner werdendem Flächeninhalt geben...

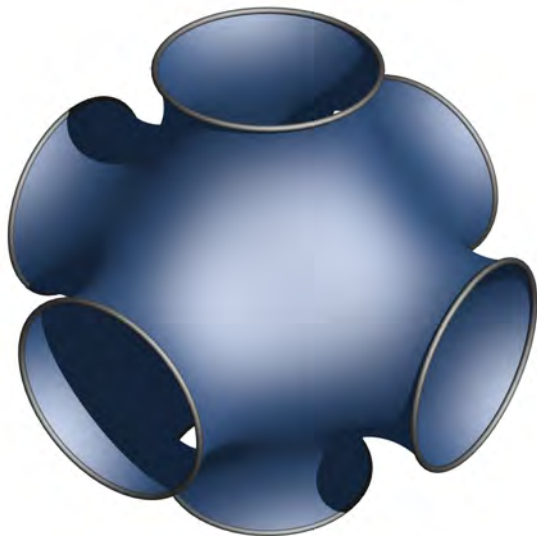


Nicht-Existenz

Außerdem garantiert der Existenzsatz nur die Existenz von Minimalflächen, die Bild einer Kreisscheibe sind.

Hat die Fläche Löcher und mehrere Randkomponenten so wie hier...

...so kann es Folgen von Flächen mit immer kleiner werdendem Flächeninhalt geben...

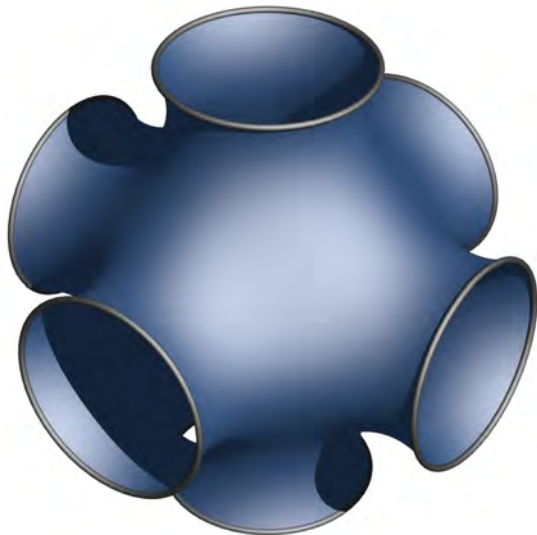


Nicht-Existenz

Außerdem garantiert der Existenzsatz nur die Existenz von Minimalflächen, die Bild einer Kreisscheibe sind.

Hat die Fläche Löcher und mehrere Randkomponenten so wie hier...

...so kann es Folgen von Flächen mit immer kleiner werdendem Flächeninhalt geben...

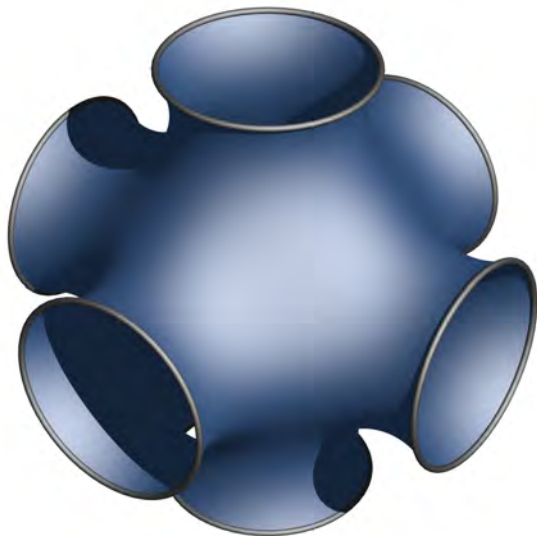


Nicht-Existenz

Außerdem garantiert der Existenzsatz nur die Existenz von Minimalflächen, die Bild einer Kreisscheibe sind.

Hat die Fläche Löcher und mehrere Randkomponenten so wie hier...

...so kann es Folgen von Flächen mit immer kleiner werdendem Flächeninhalt geben...

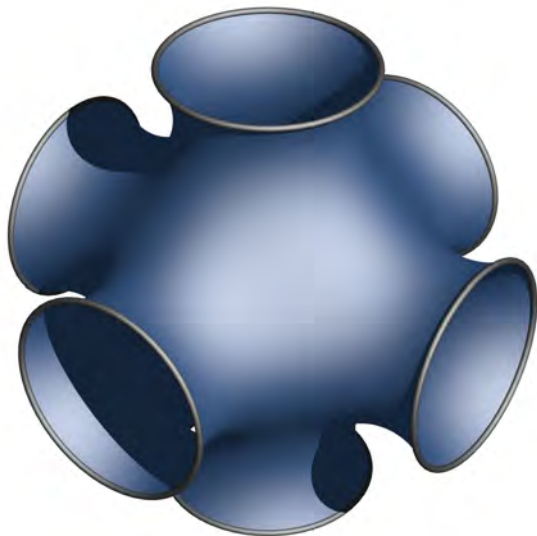


Nicht-Existenz

Außerdem garantiert der Existenzsatz nur die Existenz von Minimalflächen, die Bild einer Kreisscheibe sind.

Hat die Fläche Löcher und mehrere Randkomponenten so wie hier...

...so kann es Folgen von Flächen mit immer kleiner werdendem Flächeninhalt geben...

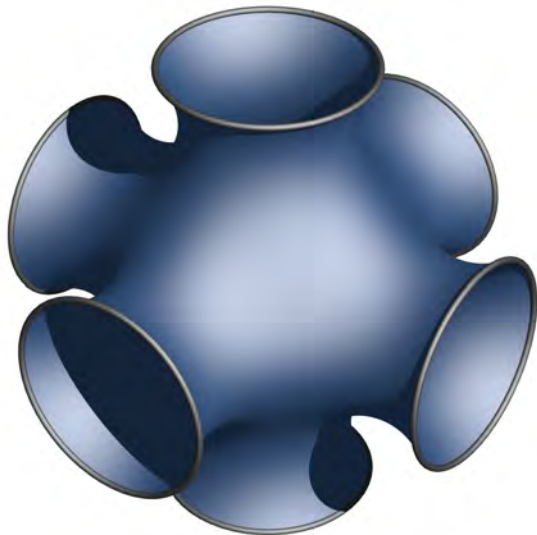


Nicht-Existenz

Außerdem garantiert der Existenzsatz nur die Existenz von Minimalflächen, die Bild einer Kreisscheibe sind.

Hat die Fläche Löcher und mehrere Randkomponenten so wie hier...

...so kann es Folgen von Flächen mit immer kleiner werdendem Flächeninhalt geben...

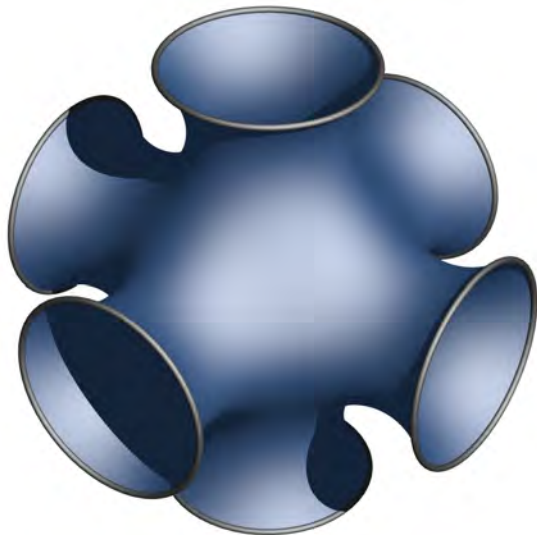


Nicht-Existenz

Außerdem garantiert der Existenzsatz nur die Existenz von Minimalflächen, die Bild einer Kreisscheibe sind.

Hat die Fläche Löcher und mehrere Randkomponenten so wie hier...

...so kann es Folgen von Flächen mit immer kleiner werdendem Flächeninhalt geben...

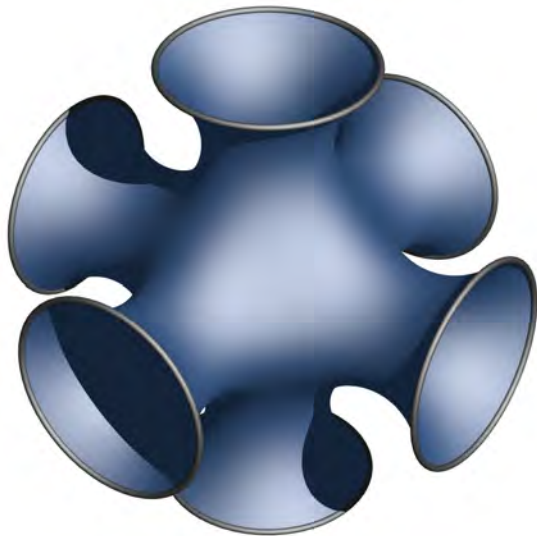


Nicht-Existenz

Außerdem garantiert der Existenzsatz nur die Existenz von Minimalflächen, die Bild einer Kreisscheibe sind.

Hat die Fläche Löcher und mehrere Randkomponenten so wie hier...

...so kann es Folgen von Flächen mit immer kleiner werdendem Flächeninhalt geben...

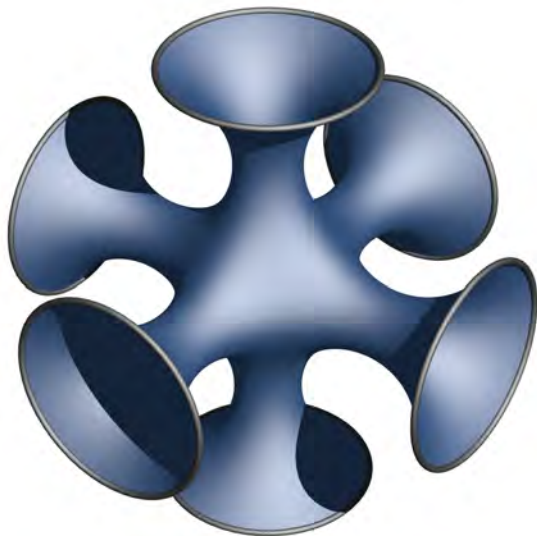


Nicht-Existenz

Außerdem garantiert der Existenzsatz nur die Existenz von Minimalflächen, die Bild einer Kreisscheibe sind.

Hat die Fläche Löcher und mehrere Randkomponenten so wie hier...

...so kann es Folgen von Flächen mit immer kleiner werdendem Flächeninhalt geben...

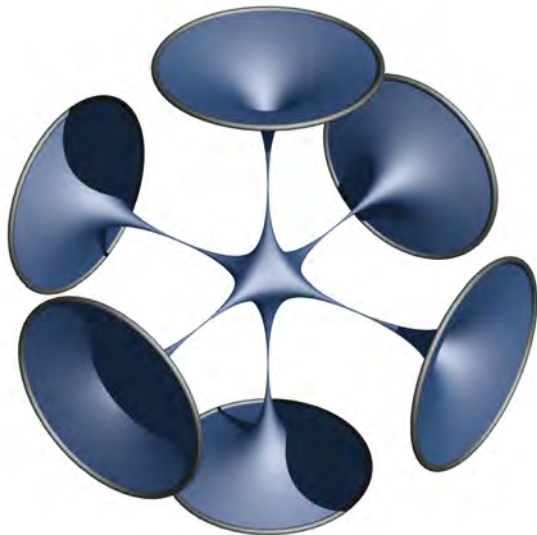


Nicht-Existenz

Außerdem garantiert der Existenzsatz nur die Existenz von Minimalflächen, die Bild einer Kreisscheibe sind.

Hat die Fläche Löcher und mehrere Randkomponenten so wie hier...

... so kann es Folgen von Flächen mit immer kleiner werdendem Flächeninhalt geben...

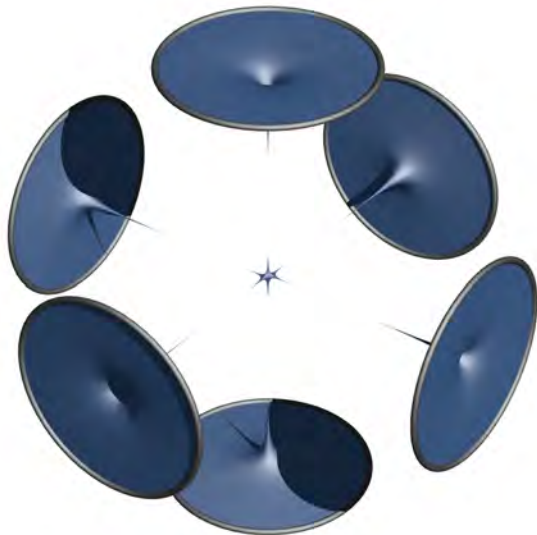


Nicht-Existenz

Außerdem garantiert der Existenzsatz nur die Existenz von Minimalflächen, die Bild einer Kreisscheibe sind.

Hat die Fläche Löcher und mehrere Randkomponenten so wie hier...

... so kann es Folgen von Flächen mit immer kleiner werdendem Flächeninhalt geben...



Nicht-Existenz

Außerdem garantiert der Existenzsatz nur die Existenz von Minimalflächen, die Bild einer Kreisscheibe sind.

Hat die Fläche Löcher und mehrere Randkomponenten so wie hier...

... so kann es Folgen von Flächen mit immer kleiner werdendem Flächeninhalt geben...



Nicht-Existenz

Außerdem garantiert der Existenzsatz nur die Existenz von Minimalflächen, die Bild einer Kreisscheibe sind.

Hat die Fläche Löcher und mehrere Randkomponenten so wie hier...

... so kann es Folgen von Flächen mit immer kleiner werdendem Flächeninhalt geben...



Nicht-Existenz

Außerdem garantiert der Existenzsatz nur die Existenz von Minimalflächen, die Bild einer Kreisscheibe sind.

Hat die Fläche Löcher und mehrere Randkomponenten so wie hier...

... so kann es Folgen von Flächen mit immer kleiner werdendem Flächeninhalt geben...

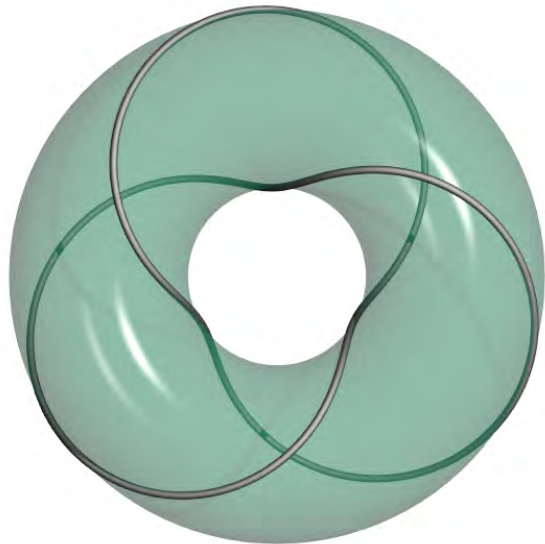
..., die keinen Grenzwert haben.



Beispiele und Beobachtungen

Symmetrie I

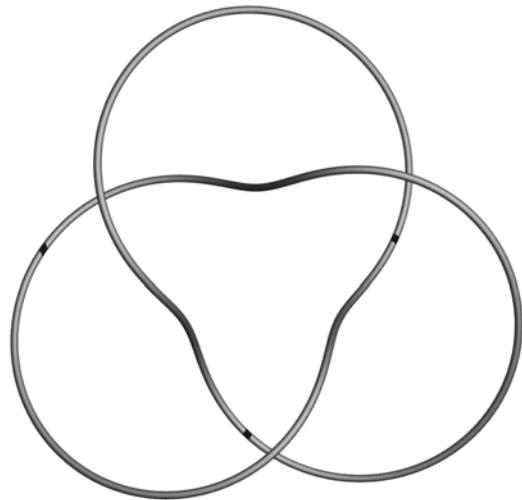
Die gezeigte Kurve ist eine auf einem Donut verlaufende *Kleeblattschlinge* (auch *Trefoil* genannt).



Symmetrie I

Die gezeigte Kurve ist eine auf einem Donut verlaufende *Kleeblattschlinge* (auch *Trefoil* genannt).

Sie besitzt eine dreifache Rotationssymmetrie.

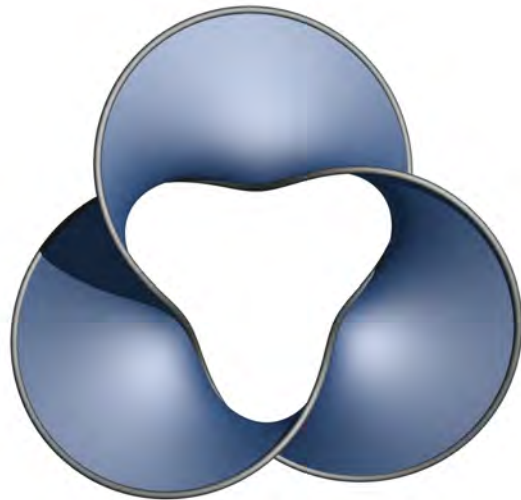


Symmetrie I

Die gezeigte Kurve ist eine auf einem Donut verlaufende *Kleeblattschlinge* (auch *Trefoil* genannt).

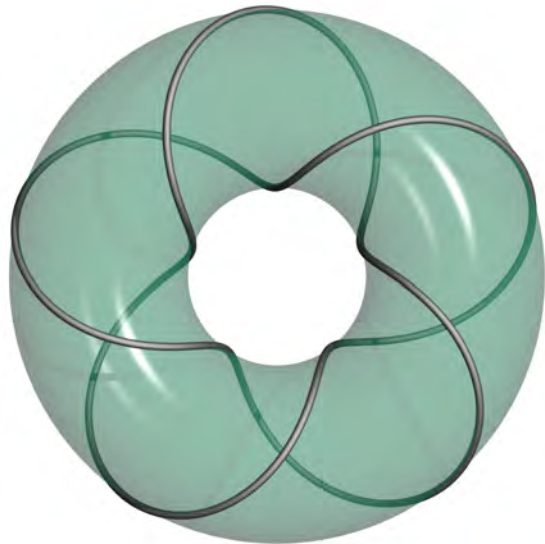
Sie besitzt eine dreifache Rotationssymmetrie.

Hier eine darin eingespannte Minimalfläche. Die Fläche hat die Form eines *Möbiusbandes* und hat ebenfalls eine dreifache Rotationssymmetrie.



Symmetrie II

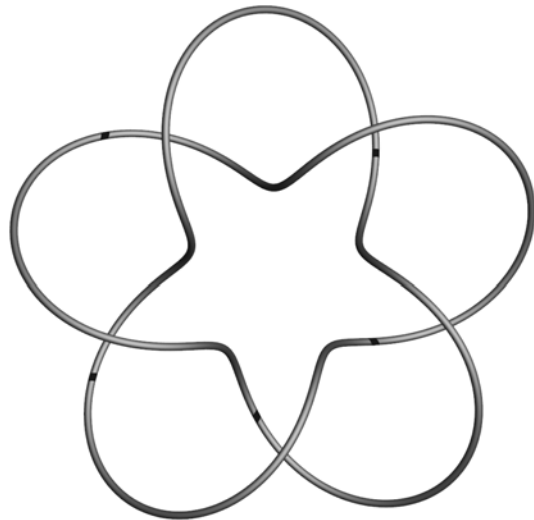
Hier ist ein auf dem Donut liegender *Cinquefoil*.



Symmetrie II

Hier ist ein auf dem Donut liegender *Cinquefoil*.

Er besitzt eine fünffache Rotationssymmetrie.

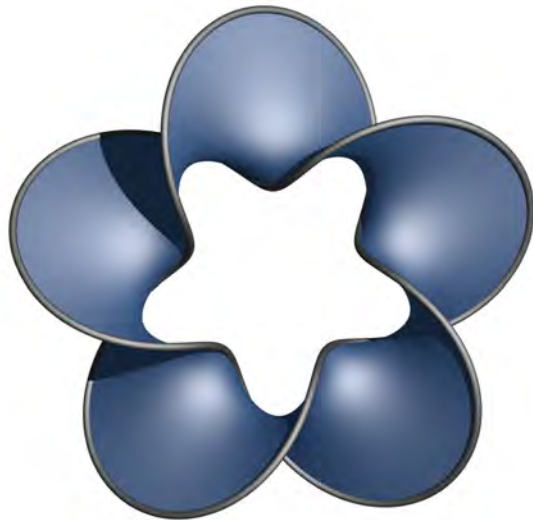


Symmetrie II

Hier ist ein auf dem Donut liegender *Cinquefoil*.

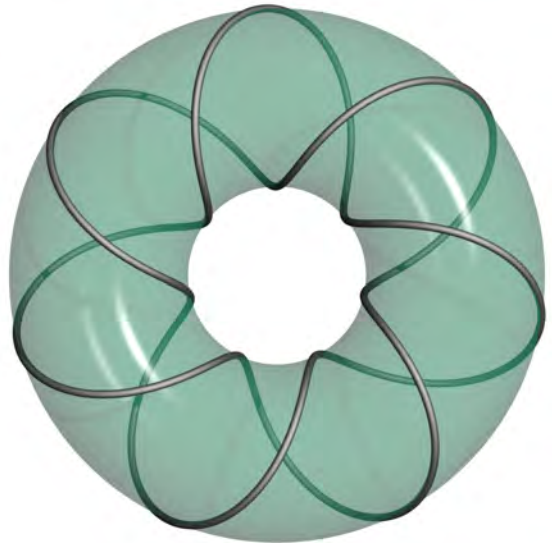
Er besitzt eine fünffache Rotationssymmetrie.

Hier eine darin eingespannte Minimalfläche. Die Fläche hat wieder die Form eines Möbiusbandes und hat ebenfalls eine fünffache Rotationssymmetrie.



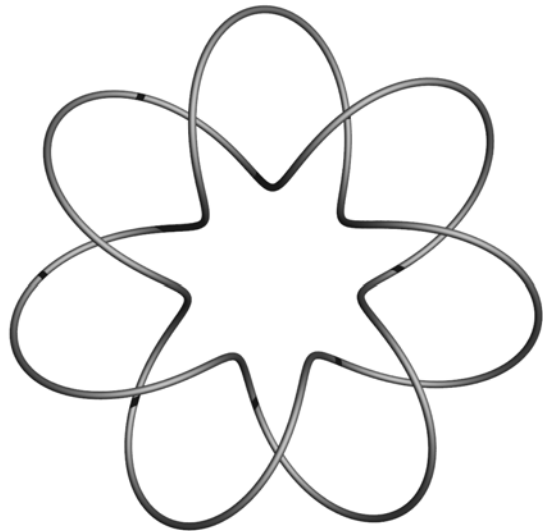
Spontane Symmetriebrechung I

Der *Septfoil*.



Spontane Symmetriebrechung I

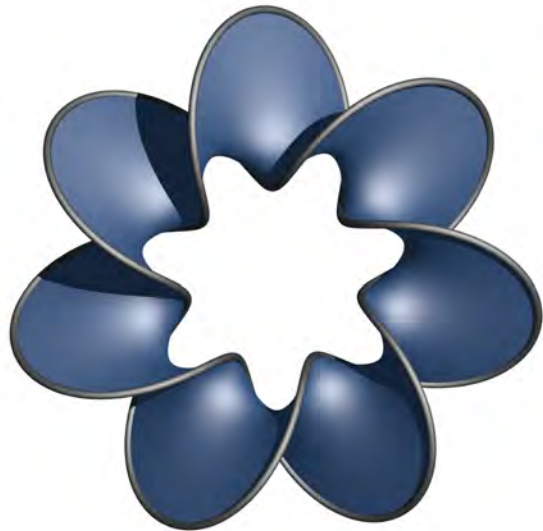
Der *Septfoil*. Er besitzt eine siebenfache Rotationssymmetrie.



Spontane Symmetriebrechung I

Der *Septfoil*. Er besitzt eine siebenfache Rotationssymmetrie.

Hier ein darin eingespanntes Möbiusband mit siebenfacher Symmetrie.

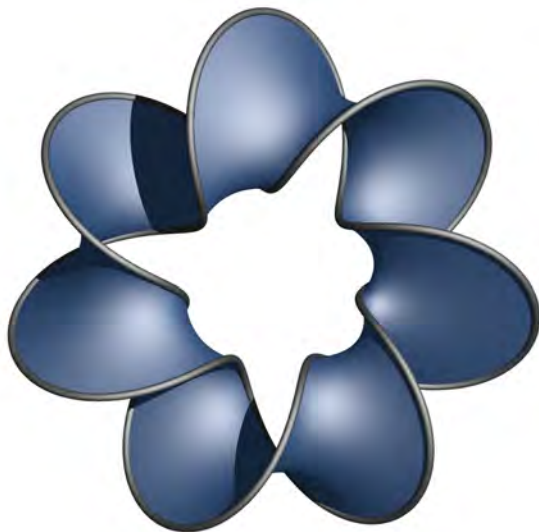


Spontane Symmetriebrechung I

Der *Septfoil*. Er besitzt eine siebenfache Rotationssymmetrie.

Hier ein darin eingespanntes Möbiusband mit siebenfacher Symmetrie.

Ein *echter* Minimierer des Flächeninhaltes. Die siebenfache Symmetrie wurde zugunsten des kleineren Flächeninhaltes aufgegeben.



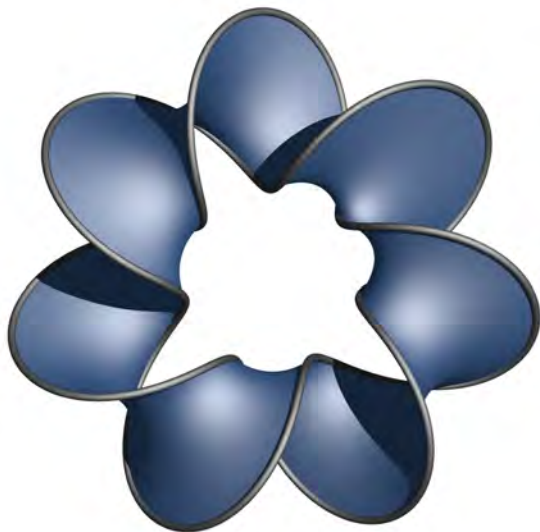
Spontane Symmetriebrechung I

Der *Septfoil*. Er besitzt eine siebenfache Rotationssymmetrie.

Hier ein darin eingespanntes Möbiusband mit siebenfacher Symmetrie.

Ein *echter* Minimierer des Flächeninhaltes. Die siebenfache Symmetrie wurde zugunsten des kleineren Flächeninhaltes aufgegeben.

Aber die *Gesamtheit* aller Lösungen besitzt noch die Symmetrien des Problems.



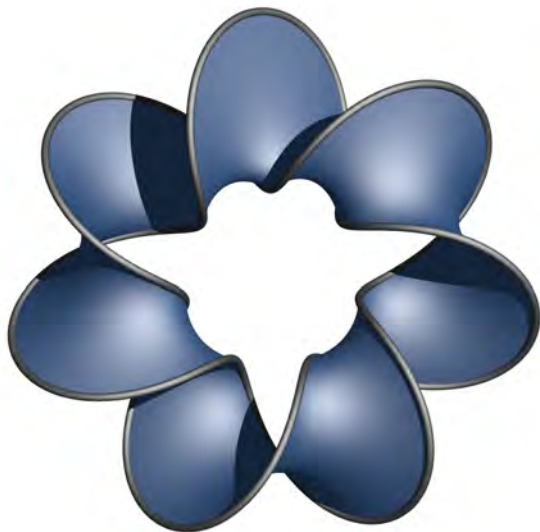
Spontane Symmetriebrechung I

Der *Septfoil*. Er besitzt eine siebenfache Rotationssymmetrie.

Hier ein darin eingespanntes Möbiusband mit siebenfacher Symmetrie.

Ein *echter* Minimierer des Flächeninhaltes. Die siebenfache Symmetrie wurde zugunsten des kleineren Flächeninhaltes aufgegeben.

Aber die *Gesamtheit* aller Lösungen besitzt noch die Symmetrien des Problems.



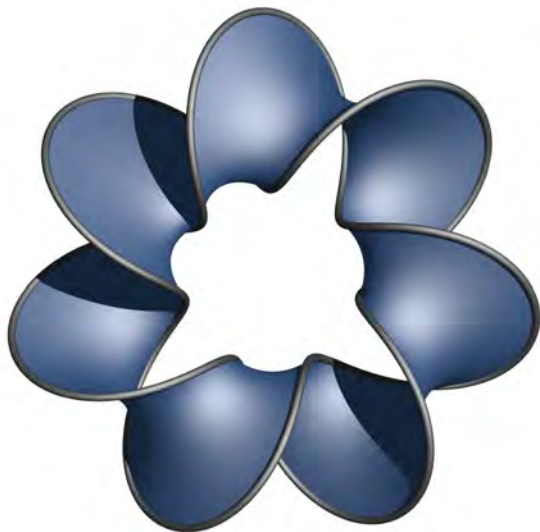
Spontane Symmetriebrechung I

Der *Septfoil*. Er besitzt eine siebenfache Rotationssymmetrie.

Hier ein darin eingespanntes Möbiusband mit siebenfacher Symmetrie.

Ein *echter* Minimierer des Flächeninhaltes. Die siebenfache Symmetrie wurde zugunsten des kleineren Flächeninhaltes aufgegeben.

Aber die *Gesamtheit* aller Lösungen besitzt noch die Symmetrien des Problems.



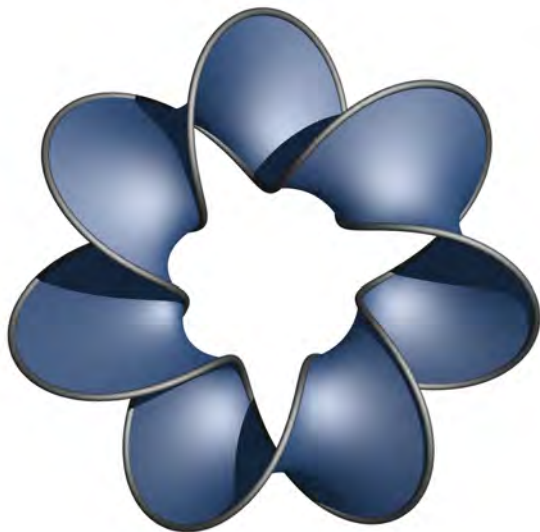
Spontane Symmetriebrechung I

Der *Septfoil*. Er besitzt eine siebenfache Rotationssymmetrie.

Hier ein darin eingespanntes Möbiusband mit siebenfacher Symmetrie.

Ein *echter* Minimierer des Flächeninhaltes. Die siebenfache Symmetrie wurde zugunsten des kleineren Flächeninhaltes aufgegeben.

Aber die *Gesamtheit* aller Lösungen besitzt noch die Symmetrien des Problems.



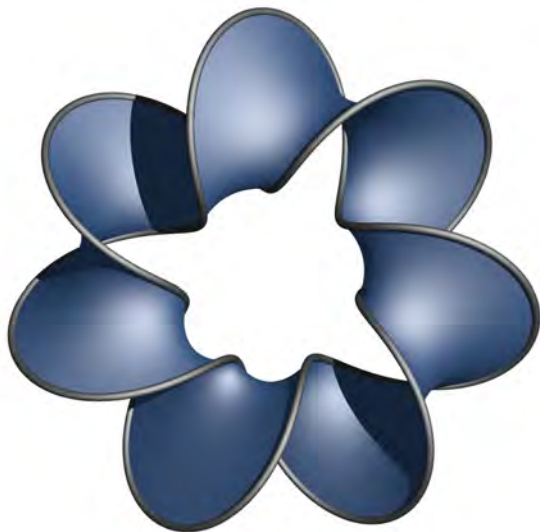
Spontane Symmetriebrechung I

Der *Septfoil*. Er besitzt eine siebenfache Rotationssymmetrie.

Hier ein darin eingespanntes Möbiusband mit siebenfacher Symmetrie.

Ein *echter* Minimierer des Flächeninhaltes. Die siebenfache Symmetrie wurde zugunsten des kleineren Flächeninhaltes aufgegeben.

Aber die *Gesamtheit* aller Lösungen besitzt noch die Symmetrien des Problems.



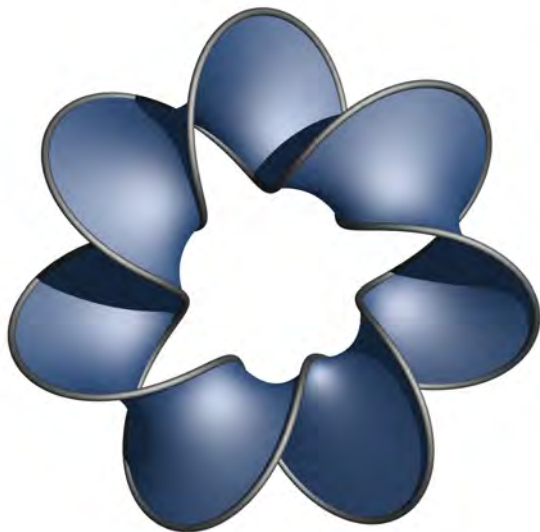
Spontane Symmetriebrechung I

Der *Septfoil*. Er besitzt eine siebenfache Rotationssymmetrie.

Hier ein darin eingespanntes Möbiusband mit siebenfacher Symmetrie.

Ein *echter* Minimierer des Flächeninhaltes. Die siebenfache Symmetrie wurde zugunsten des kleineren Flächeninhaltes aufgegeben.

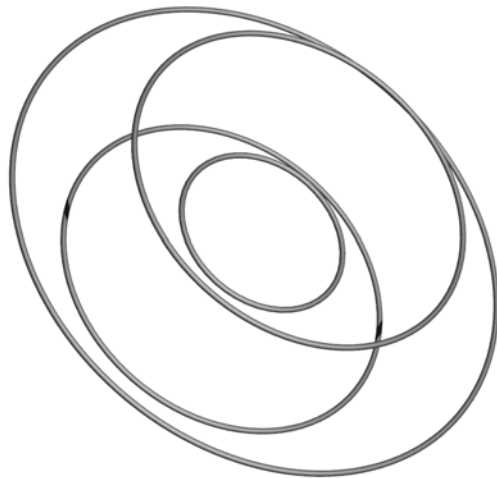
Aber die *Gesamtheit* aller Lösungen besitzt noch die Symmetrien des Problems.



Spontane Symmetriebrechung II

In seltenen Fällen können Plateau-Probleme auch ein *Kontinuum* von Lösungen besitzen:

Bei diesem Beispiel besteht der Rand Γ aus vier Kreisen mit gemeinsamer Rotationsachse.



Spontane Symmetriebrechung II

In seltenen Fällen können Plateau-Probleme auch ein *Kontinuum* von Lösungen besitzen:

Bei diesem Beispiel besteht der Rand Γ aus vier Kreisen mit gemeinsamer Rotationsachse.

Weil hineingespante Flächen gewisse „Löcher“ haben müssen, können sie nicht rotationssymmetrisch sein.



Die sogenannte *Morgan-Fläche*.

Spontane Symmetriebrechung II

In seltenen Fällen können Plateau-Probleme auch ein *Kontinuum* von Lösungen besitzen:

Bei diesem Beispiel besteht der Rand Γ aus vier Kreisen mit gemeinsamer Rotationsachse.

Weil hineingespante Flächen gewisse „Löcher“ haben müssen, können sie nicht rotationssymmetrisch sein.

Aber der *Raum* aller Minimierer besitzt wieder die volle Rotationssymmetrie.



Die sogenannte *Morgan-Fläche*.

Spontane Symmetriebrechung II

In seltenen Fällen können Plateau-Probleme auch ein *Kontinuum* von Lösungen besitzen:

Bei diesem Beispiel besteht der Rand Γ aus vier Kreisen mit gemeinsamer Rotationsachse.

Weil hineingespannte Flächen gewisse „Löcher“ haben müssen, können sie nicht rotationssymmetrisch sein.

Aber der *Raum* aller Minimierer besitzt wieder die volle Rotationssymmetrie.



Die sogenannte *Morgan-Fläche*.

Spontane Symmetriebrechung II

In seltenen Fällen können Plateau-Probleme auch ein *Kontinuum* von Lösungen besitzen:

Bei diesem Beispiel besteht der Rand Γ aus vier Kreisen mit gemeinsamer Rotationsachse.

Weil hineingespante Flächen gewisse „Löcher“ haben müssen, können sie nicht rotationssymmetrisch sein.

Aber der *Raum* aller Minimierer besitzt wieder die volle Rotationssymmetrie.



Die sogenannte *Morgan-Fläche*.

Spontane Symmetriebrechung II

In seltenen Fällen können Plateau-Probleme auch ein *Kontinuum* von Lösungen besitzen:

Bei diesem Beispiel besteht der Rand Γ aus vier Kreisen mit gemeinsamer Rotationsachse.

Weil hineingespannte Flächen gewisse „Löcher“ haben müssen, können sie nicht rotationssymmetrisch sein.

Aber der *Raum* aller Minimierer besitzt wieder die volle Rotationssymmetrie.



Die sogenannte *Morgan-Fläche*.

Spontane Symmetriebrechung II

In seltenen Fällen können Plateau-Probleme auch ein *Kontinuum* von Lösungen besitzen:

Bei diesem Beispiel besteht der Rand Γ aus vier Kreisen mit gemeinsamer Rotationsachse.

Weil hineingespante Flächen gewisse „Löcher“ haben müssen, können sie nicht rotationssymmetrisch sein.

Aber der *Raum* aller Minimierer besitzt wieder die volle Rotationssymmetrie.



Die sogenannte *Morgan-Fläche*.

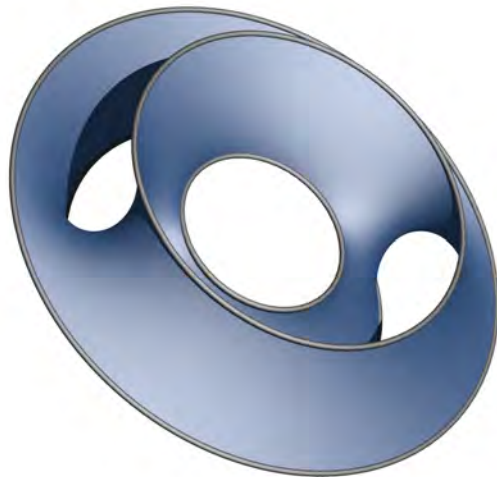
Spontane Symmetriebrechung II

In seltenen Fällen können Plateau-Probleme auch ein *Kontinuum* von Lösungen besitzen:

Bei diesem Beispiel besteht der Rand Γ aus vier Kreisen mit gemeinsamer Rotationsachse.

Weil hineingespante Flächen gewisse „Löcher“ haben müssen, können sie nicht rotationssymmetrisch sein.

Aber der *Raum* aller Minimierer besitzt wieder die volle Rotationssymmetrie.



Die sogenannte *Morgan-Fläche*.

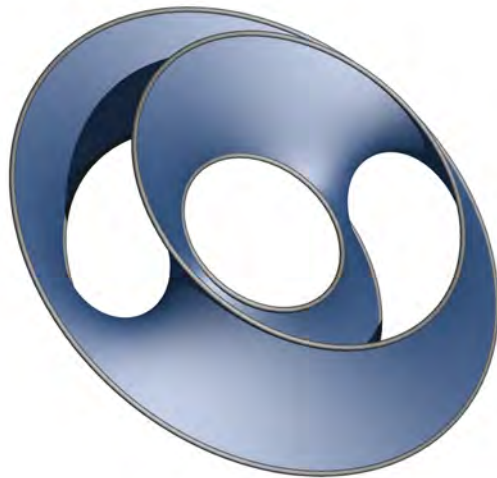
Spontane Symmetriebrechung II

In seltenen Fällen können Plateau-Probleme auch ein *Kontinuum* von Lösungen besitzen:

Bei diesem Beispiel besteht der Rand Γ aus vier Kreisen mit gemeinsamer Rotationsachse.

Weil hineingespante Flächen gewisse „Löcher“ haben müssen, können sie nicht rotationssymmetrisch sein.

Aber der *Raum* aller Minimierer besitzt wieder die volle Rotationssymmetrie.



Die sogenannte *Morgan-Fläche*.

Spontane Symmetriebrechung II

In seltenen Fällen können Plateau-Probleme auch ein *Kontinuum* von Lösungen besitzen:

Bei diesem Beispiel besteht der Rand Γ aus vier Kreisen mit gemeinsamer Rotationsachse.

Weil hineingespante Flächen gewisse „Löcher“ haben müssen, können sie nicht rotationssymmetrisch sein.

Aber der *Raum* aller Minimierer besitzt wieder die volle Rotationssymmetrie.



Die sogenannte *Morgan-Fläche*.

Spontane Symmetriebrechung II

In seltenen Fällen können Plateau-Probleme auch ein *Kontinuum* von Lösungen besitzen:

Bei diesem Beispiel besteht der Rand Γ aus vier Kreisen mit gemeinsamer Rotationsachse.

Weil hineingespannte Flächen gewisse „Löcher“ haben müssen, können sie nicht rotationssymmetrisch sein.

Aber der *Raum* aller Minimierer besitzt wieder die volle Rotationssymmetrie.



Die sogenannte *Morgan-Fläche*.

Spontane Symmetriebrechung II

In seltenen Fällen können Plateau-Probleme auch ein *Kontinuum* von Lösungen besitzen:

Bei diesem Beispiel besteht der Rand Γ aus vier Kreisen mit gemeinsamer Rotationsachse.

Weil hineingespante Flächen gewisse „Löcher“ haben müssen, können sie nicht rotationssymmetrisch sein.

Aber der *Raum* aller Minimierer besitzt wieder die volle Rotationssymmetrie.



Die sogenannte *Morgan-Fläche*.

Spontane Symmetriebrechung II

In seltenen Fällen können Plateau-Probleme auch ein *Kontinuum* von Lösungen besitzen:

Bei diesem Beispiel besteht der Rand Γ aus vier Kreisen mit gemeinsamer Rotationsachse.

Weil hineingespannte Flächen gewisse „Löcher“ haben müssen, können sie nicht rotationssymmetrisch sein.

Aber der *Raum* aller Minimierer besitzt wieder die volle Rotationssymmetrie.



Die sogenannte *Morgan-Fläche*.

Spontane Symmetriebrechung II

In seltenen Fällen können Plateau-Probleme auch ein *Kontinuum* von Lösungen besitzen:

Bei diesem Beispiel besteht der Rand Γ aus vier Kreisen mit gemeinsamer Rotationsachse.

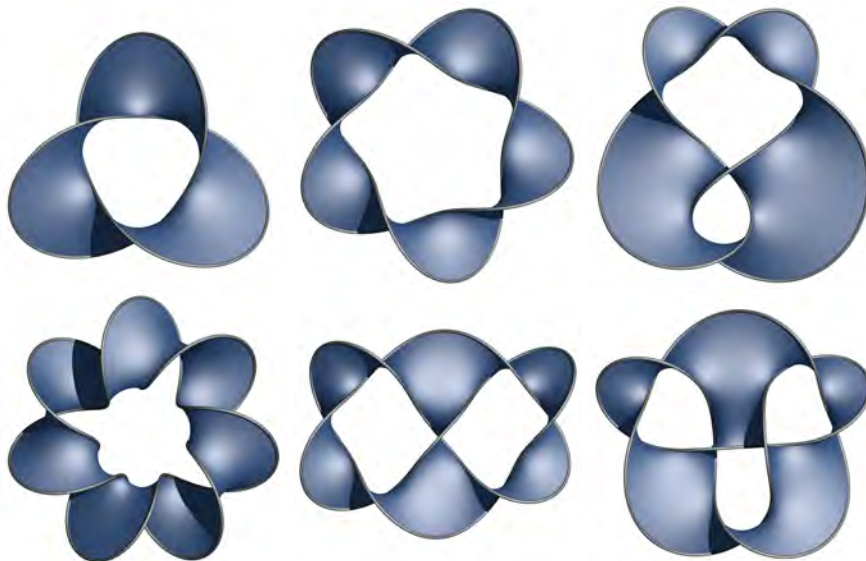
Weil hineingespante Flächen gewisse „Löcher“ haben müssen, können sie nicht rotationssymmetrisch sein.

Aber der *Raum* aller Minimierer besitzt wieder die volle Rotationssymmetrie.

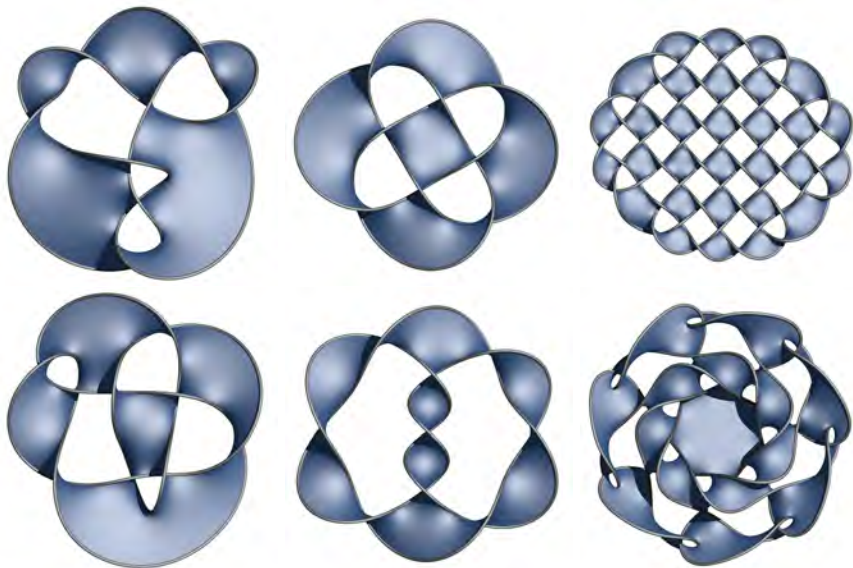


Die sogenannte *Morgan-Fläche*.

Weitere Beispiele I



Weitere Beispiele II



Numerische Berechnung

Näherungsweise Lösungen

Obwohl man sie in manchen Fällen findet, kann man in der Regel nicht darauf hoffen, exakte Ausdrücke für Lösungen des Plateau-Problems durch bekannte Funktionen zu finden.

Näherungsweise Lösungen

Obwohl man sie in manchen Fällen findet, kann man in der Regel nicht darauf hoffen, exakte Ausdrücke für Lösungen des Plateau-Problems durch bekannte Funktionen zu finden.

Für praktische Zwecke kommt man so gut wie immer mit Näherungslösungen aus.

Näherungsweise Lösungen

Obwohl man sie in manchen Fällen findet, kann man in der Regel nicht darauf hoffen, exakte Ausdrücke für Lösungen des Plateau-Problems durch bekannte Funktionen zu finden.

Für praktische Zwecke kommt man so gut wie immer mit Näherungslösungen aus.

Für komplexe Berechnungen kann man Computer nutzen.

Näherungsweise Lösungen

Obwohl man sie in manchen Fällen findet, kann man in der Regel nicht darauf hoffen, exakte Ausdrücke für Lösungen des Plateau-Problems durch bekannte Funktionen zu finden.

Für praktische Zwecke kommt man so gut wie immer mit Näherungslösungen aus.

Für komplexe Berechnungen kann man Computer nutzen.

Aber: Computer haben auch nur begrenzte Kapazitäten wie Arbeitsspeicher oder CPU-Geschwindigkeit.

→ Eine echte Minimalfläche mit unendlich vielen Punkten kann man gar nicht verarbeiten!

Näherungsweise Lösungen

Obwohl man sie in manchen Fällen findet, kann man in der Regel nicht darauf hoffen, exakte Ausdrücke für Lösungen des Plateau-Problems durch bekannte Funktionen zu finden.

Für praktische Zwecke kommt man so gut wie immer mit Näherungslösungen aus.

Für komplexe Berechnungen kann man Computer nutzen.

Aber: Computer haben auch nur begrenzte Kapazitäten wie Arbeitsspeicher oder CPU-Geschwindigkeit.

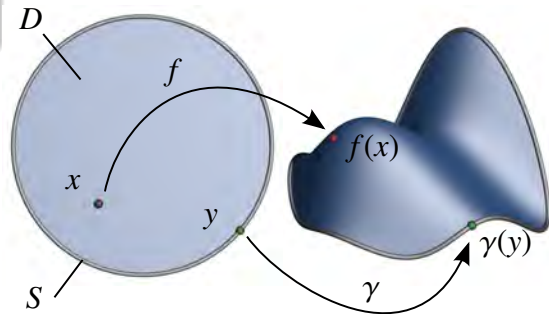
→ Eine echte Minimalfläche mit unendlich vielen Punkten kann man gar nicht verarbeiten!

Idee: Man ändert das Minimierungsproblem ein wenig ab, um nur endlich viele Parameter verarbeiten zu müssen.

Diskretisierung der Mathematischen Formulierung I

Plateau-Problem

Minimiere die Funktion A auf C , dem Raum *aller* Flächen, die γ als Rand haben.

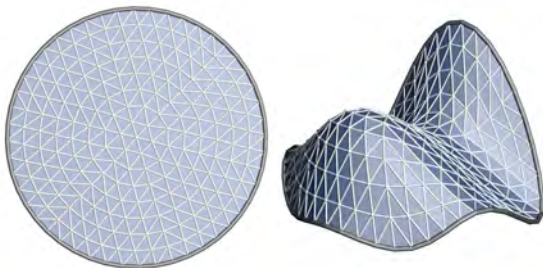


Diskretisierung der Mathematischen Formulierung I

Plateau-Problem

Minimiere die Funktion A auf C , dem Raum *aller* Flächen, die γ als Rand haben.

Stattdessen zerlegen wir die Kreisscheibe in n Dreiecke und bezeichnen mit C_n den Raum aller (stetiger) Funktionen, die auf jedem Dreieck linear sind und mit γ auf dem Rand übereinstimmen.

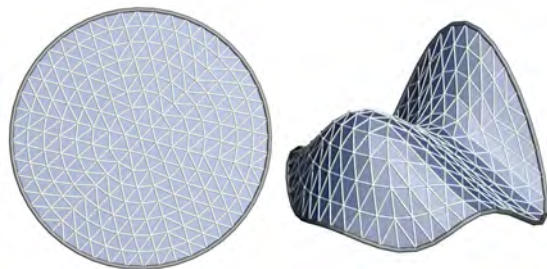


Diskretisierung der Mathematischen Formulierung I

Plateau-Problem

Minimiere die Funktion A auf C , dem Raum *aller* Flächen, die γ als Rand haben.

Stattdessen zerlegen wir die Kreisscheibe in n Dreiecke und bezeichnen mit C_n den Raum aller (stetiger) Funktionen, die auf jedem Dreieck linear sind und mit γ auf dem Rand übereinstimmen.



Diskretisiertes Plateau-Problem

Minimiere die Funktion A auf C_n .

Diskretisierung der Mathematischen Formulierung I

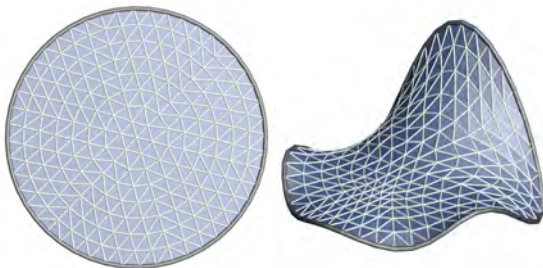
Plateau-Problem

Minimiere die Funktion A auf C , dem Raum *aller* Flächen, die γ als Rand haben.

Stattdessen zerlegen wir die Kreisscheibe in n Dreiecke und bezeichnen mit C_n den Raum aller (stetiger) Funktionen, die auf jedem Dreieck linear sind und mit γ auf dem Rand übereinstimmen.

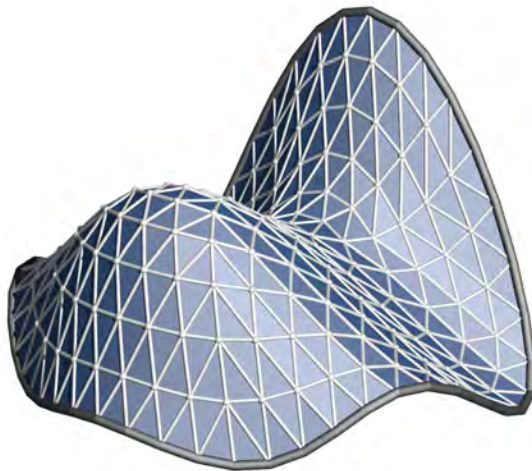
Diskretisiertes Plateau-Problem

Minimiere die Funktion A auf C_n .



Diskretisierung der Mathematischen Formulierung II

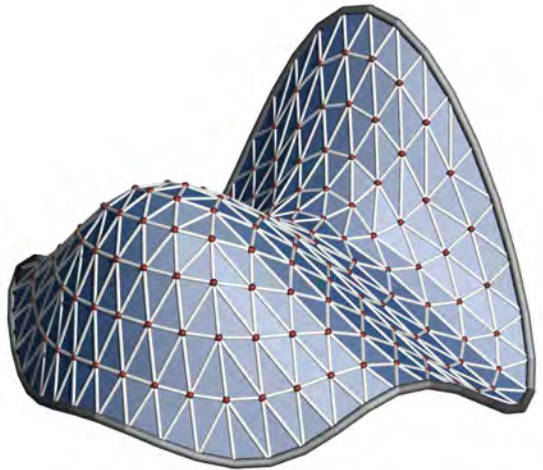
Um eine Fläche aus C_n zu kennen, braucht man lediglich die Positionen der *Eckpunkte* der Dreiecke zu wissen.



Diskretisierung der Mathematischen Formulierung II

Um eine Fläche aus C_n zu kennen, braucht man lediglich die Positionen der *Eckpunkte* der Dreiecke zu wissen.

Ist E die Anzahl der Ecken, so sind das $3 \times E$ reelle Zahlen.

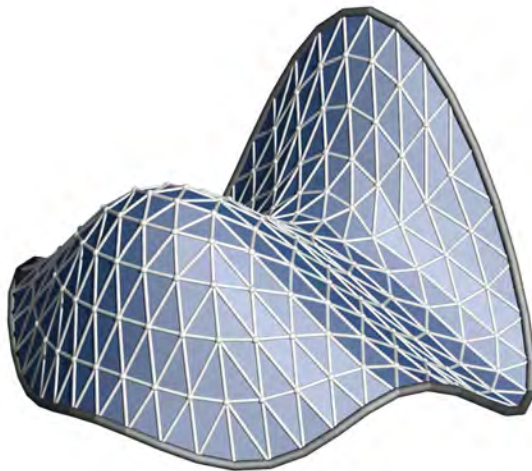


Diskretisierung der Mathematischen Formulierung II

Um eine Fläche aus C_n zu kennen, braucht man lediglich die Positionen der *Eckpunkte* der Dreiecke zu wissen.

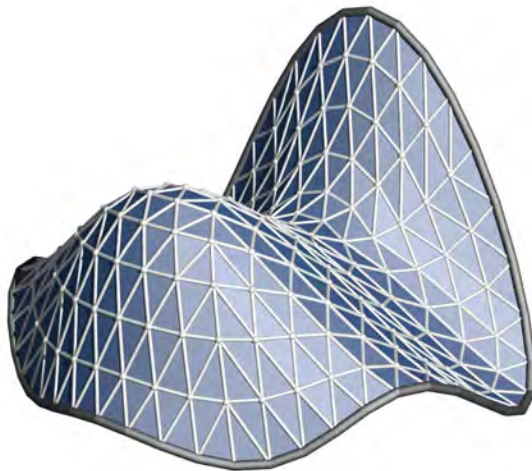
Ist E die Anzahl der Ecken, so sind das $3 \times E$ reelle Zahlen.

Den Flächeninhalt A_n der Fläche kann man dann einfach als Summe der Flächeninhalte der Dreiecke berechnen und man erhält eine Funktion $A_n: \mathbb{R}^{3 \times E} \rightarrow \mathbb{R}$.



Lösung des diskretisierten Problems

Jetzt kann man anfangen, die inneren Eckpunkte zu variieren ...



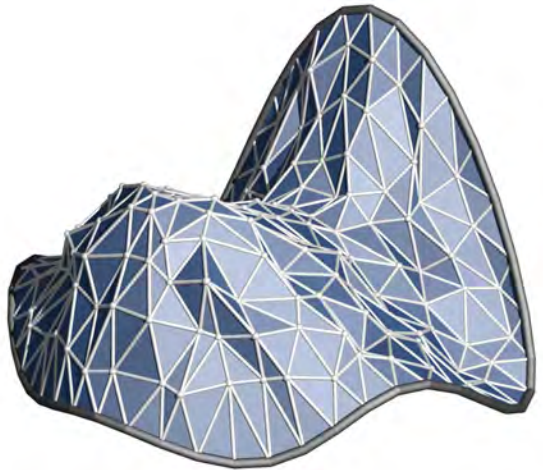
Lösung des diskretisierten Problems

Jetzt kann man anfangen, die inneren Eckpunkte zu variieren ...



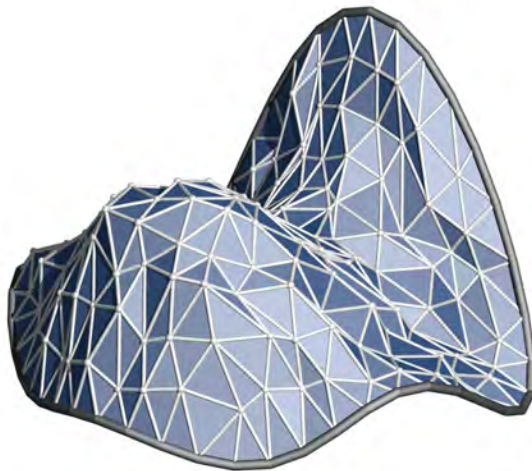
Lösung des diskretisierten Problems

Jetzt kann man anfangen, die inneren Eckpunkte zu variieren ...



Lösung des diskretisierten Problems

Jetzt kann man anfangen, die inneren Eckpunkte zu variieren ...



Lösung des diskretisierten Problems

Jetzt kann man anfangen, die inneren Eckpunkte zu variieren ...



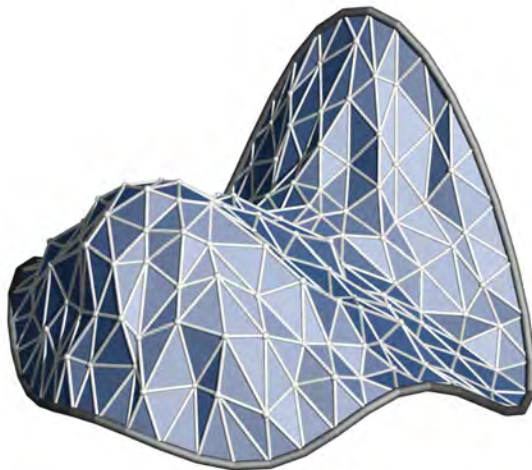
Lösung des diskretisierten Problems

Jetzt kann man anfangen, die inneren Eckpunkte zu variieren ...



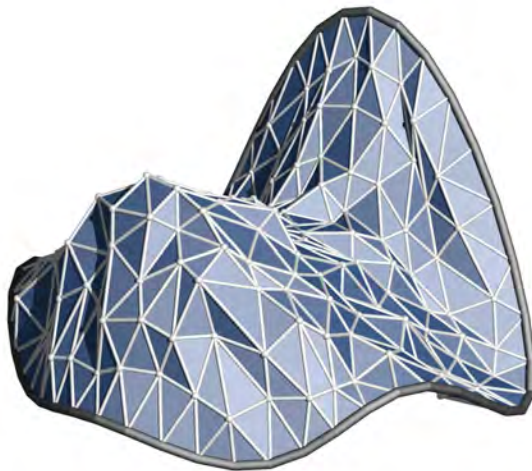
Lösung des diskretisierten Problems

Jetzt kann man anfangen, die inneren Eckpunkte zu variieren ...



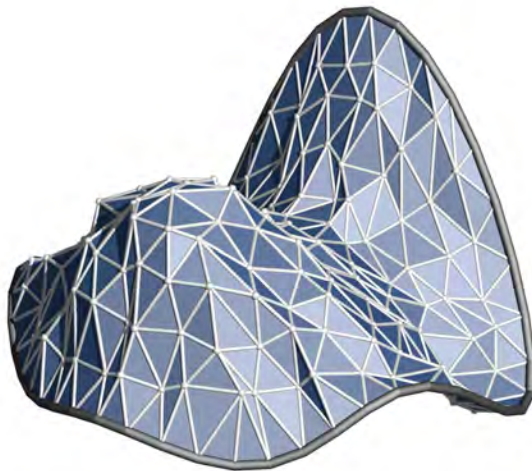
Lösung des diskretisierten Problems

Jetzt kann man anfangen, die inneren Eckpunkte zu variieren ...



Lösung des diskretisierten Problems

Jetzt kann man anfangen, die inneren Eckpunkte zu variieren ...



Lösung des diskretisierten Problems

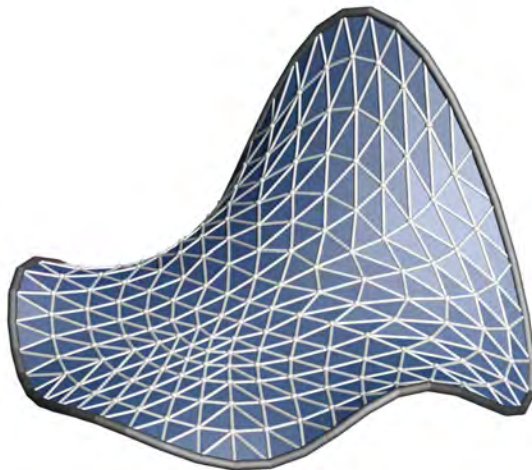
Jetzt kann man anfangen, die inneren Eckpunkte zu variieren ...



Lösung des diskretisierten Problems

Jetzt kann man anfangen, die inneren Eckpunkte zu variieren ...

...bis man schließlich ein Minimum gefunden hat.

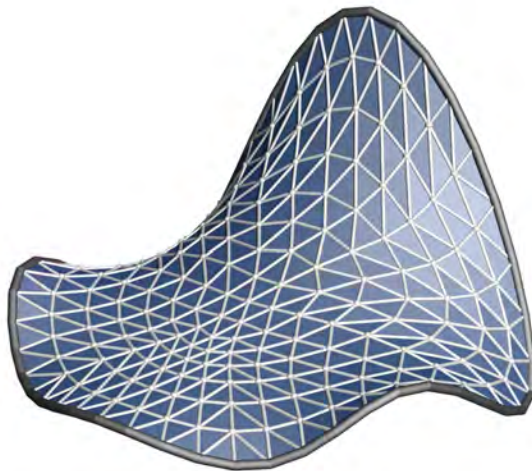


Lösung des diskretisierten Problems

Jetzt kann man anfangen, die inneren Eckpunkte zu variieren ...

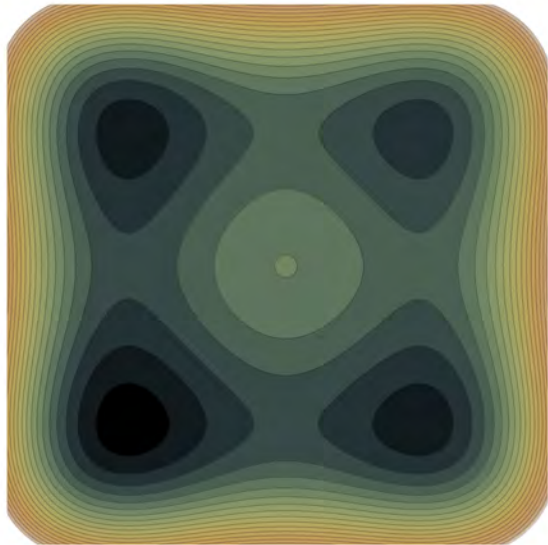
...bis man schließlich ein Minimum gefunden hat.

Aber Moment: Es gibt ja noch immer unendlich viele Elemente in C_n ! Die kann man ja nicht alle durchprobieren!



Das Verfahren des steilsten Abstiegs

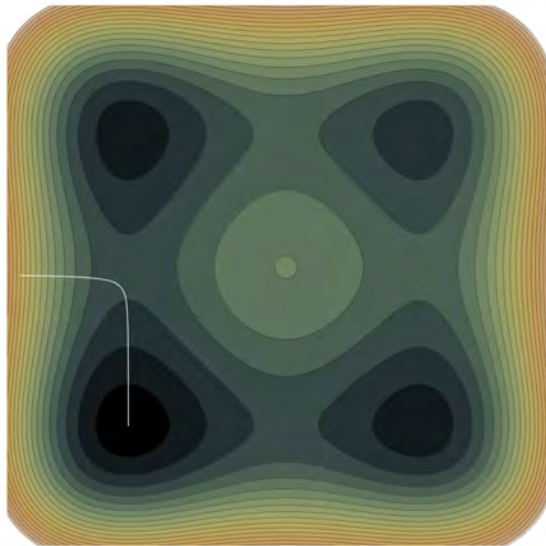
Fasst man die Funktion A als Höhenfunktion über $\mathbb{R}^{3 \times E}$ auf, so hilft folgende Analogie weiter:



Das Verfahren des steilsten Abstiegs

Fasst man die Funktion A als Höhenfunktion über $\mathbb{R}^{3 \times E}$ auf, so hilft folgende Analogie weiter:

Befindet man sich bei Nebel im Gebirge und möchte hinab ins Tal, tut man gut daran, immer in Richtung des steilsten Abstiegs (senkrecht zu den Höhenlinien) zu laufen.

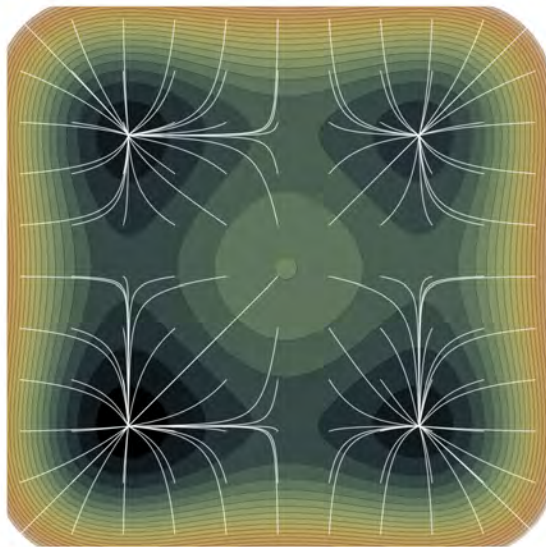


Das Verfahren des steilsten Abstiegs

Fasst man die Funktion A als Höhenfunktion über $\mathbb{R}^{3 \times E}$ auf, so hilft folgende Analogie weiter:

Befindet man sich bei Nebel im Gebirge und möchte hinab ins Tal, tut man gut daran, immer in Richtung des steilsten Abstiegs (senkrecht zu den Höhenlinien) zu laufen.

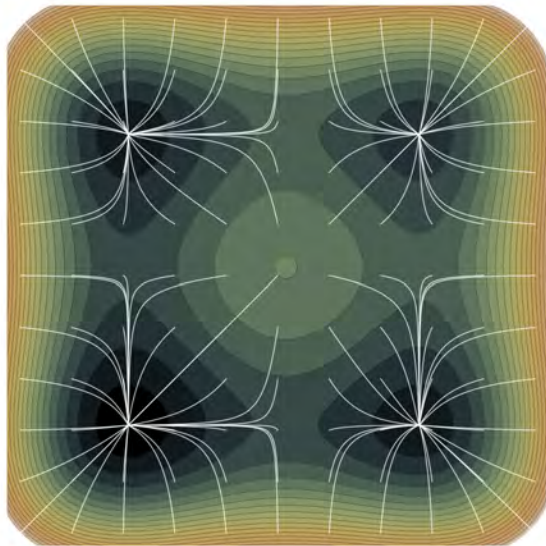
Dieses Verfahren ist sogar recht zuverlässig. Aber nicht immer erreicht man ein globales Minimum. Bei Seifenfilmen sind aber auch *lokale Minima* stabil und daher physikalisch realisierbar.



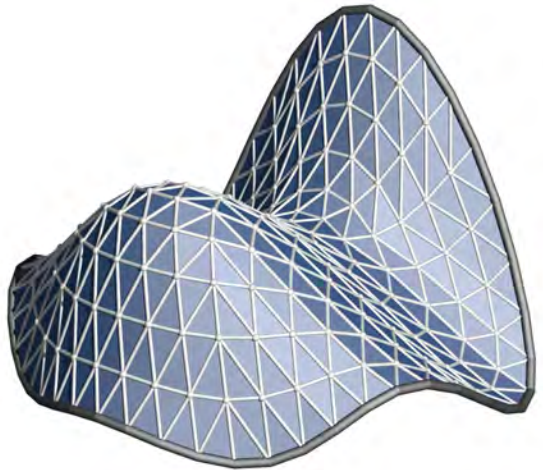
Das Verfahren des steilsten Abstiegs

Im Euklidischen Raum kann man die Richtung $\vec{\text{grad}}(A)$ des steilsten Abstiegs der Funktion A durch ihre komponentenweise Ableitung berechnen:

$$\vec{\text{grad}}(A)(x_1, \dots, x_n) = - \begin{pmatrix} \frac{\partial A}{\partial x_1}(x_1, \dots, x_n) \\ \vdots \\ \frac{\partial A}{\partial x_n}(x_1, \dots, x_n) \end{pmatrix}$$

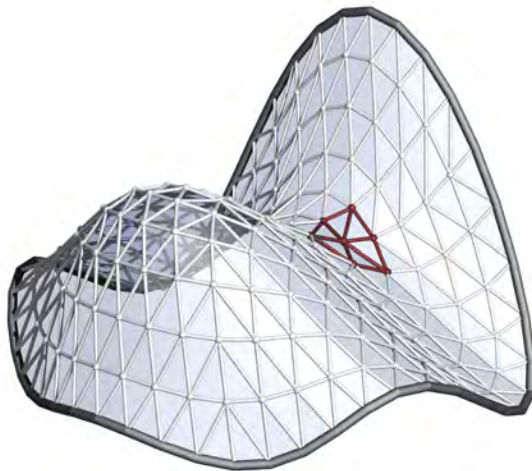


Steilster Abstieg für den Flächeninhalt



Steilster Abstieg für den Flächeninhalt

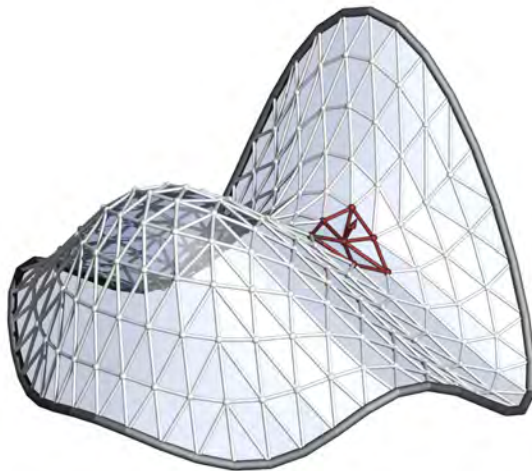
Ein einzelner Eckpunkt hat nur unmittelbaren Einfluss auf die Flächeninhalte der benachbarten Dreiecke.



Steilster Abstieg für den Flächeninhalt

Ein einzelner Eckpunkt hat nur unmittelbaren Einfluss auf die Flächeninhalte der benachbarten Dreiecke.

Die steilste Abstiegsrichtung für diesen Punkt ist ein Vektor im $\mathbb{R}^3$.

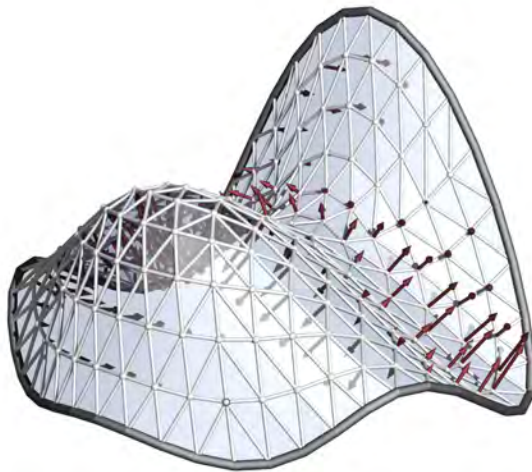


Steilster Abstieg für den Flächeninhalt

Ein einzelner Eckpunkt hat nur unmittelbaren Einfluss auf die Flächeninhalte der benachbarten Dreiecke.

Die steilste Abstiegsrichtung für diesen Punkt ist ein Vektor im $\mathbb{R}^3$.

Diese Vektoren kann man für jeden Eckpunkt berechnen.



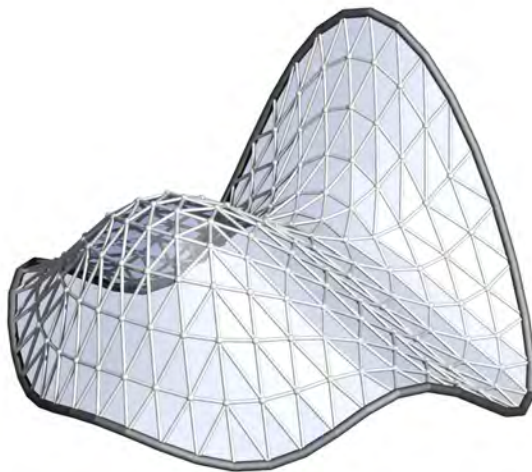
Steilster Abstieg für den Flächeninhalt

Ein einzelner Eckpunkt hat nur unmittelbaren Einfluss auf die Flächeninhalte der benachbarten Dreiecke.

Die steilste Abstiegsrichtung für diesen Punkt ist ein Vektor im $\mathbb{R}^3$.

Diese Vektoren kann man für jeden Eckpunkt berechnen.

Anschließend verschiebt man jeden Eckpunkt ein klein wenig in Richtung dieser Vektoren.



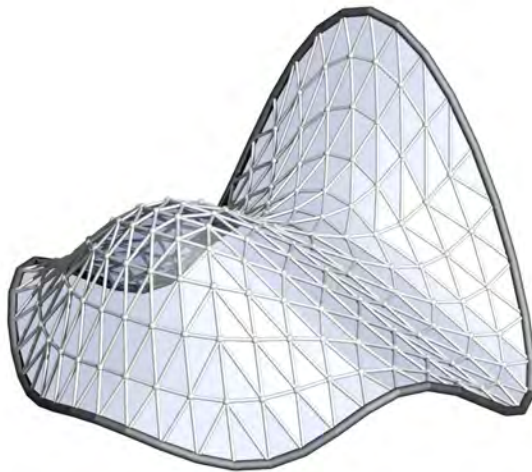
Steilster Abstieg für den Flächeninhalt

Ein einzelner Eckpunkt hat nur unmittelbaren Einfluss auf die Flächeninhalte der benachbarten Dreiecke.

Die steilste Abstiegsrichtung für diesen Punkt ist ein Vektor im $\mathbb{R}^3$.

Diese Vektoren kann man für jeden Eckpunkt berechnen.

Anschließend verschiebt man jeden Eckpunkt ein klein wenig in Richtung dieser Vektoren.



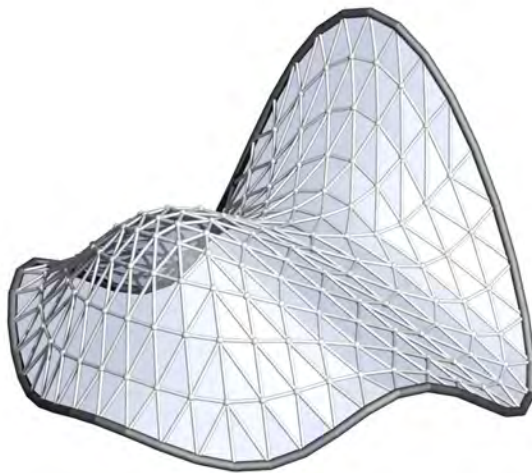
Steilster Abstieg für den Flächeninhalt

Ein einzelner Eckpunkt hat nur unmittelbaren Einfluss auf die Flächeninhalte der benachbarten Dreiecke.

Die steilste Abstiegsrichtung für diesen Punkt ist ein Vektor im $\mathbb{R}^3$.

Diese Vektoren kann man für jeden Eckpunkt berechnen.

Anschließend verschiebt man jeden Eckpunkt ein klein wenig in Richtung dieser Vektoren.



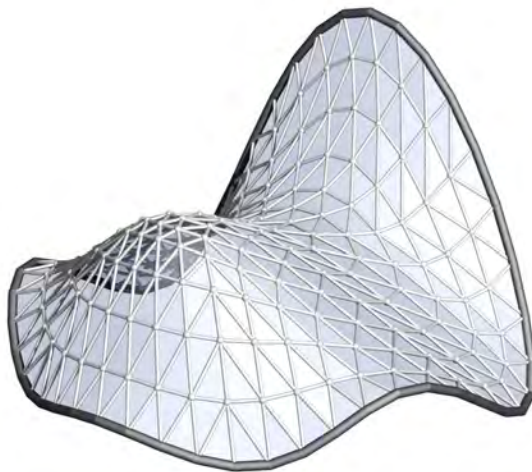
Steilster Abstieg für den Flächeninhalt

Ein einzelner Eckpunkt hat nur unmittelbaren Einfluss auf die Flächeninhalte der benachbarten Dreiecke.

Die steilste Abstiegsrichtung für diesen Punkt ist ein Vektor im $\mathbb{R}^3$.

Diese Vektoren kann man für jeden Eckpunkt berechnen.

Anschließend verschiebt man jeden Eckpunkt ein klein wenig in Richtung dieser Vektoren.



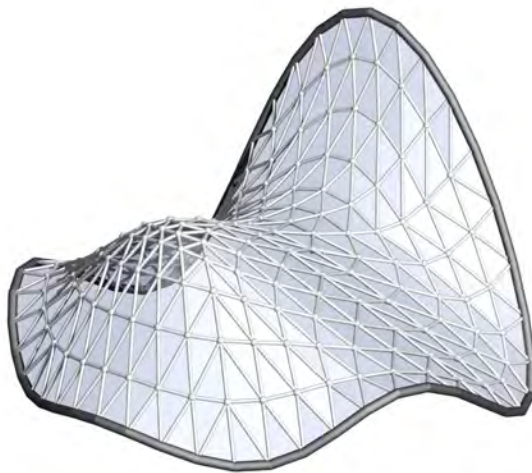
Steilster Abstieg für den Flächeninhalt

Ein einzelner Eckpunkt hat nur unmittelbaren Einfluss auf die Flächeninhalte der benachbarten Dreiecke.

Die steilste Abstiegsrichtung für diesen Punkt ist ein Vektor im $\mathbb{R}^3$.

Diese Vektoren kann man für jeden Eckpunkt berechnen.

Anschließend verschiebt man jeden Eckpunkt ein klein wenig in Richtung dieser Vektoren.



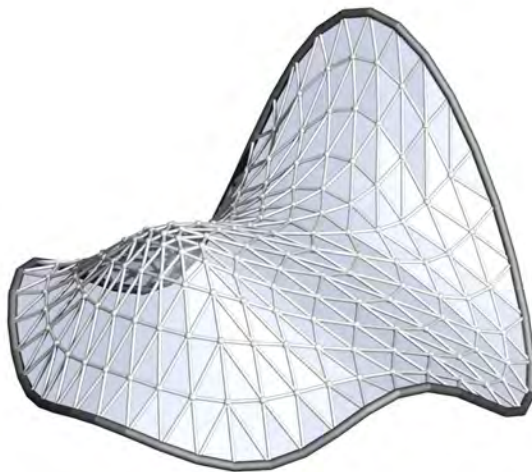
Steilster Abstieg für den Flächeninhalt

Ein einzelner Eckpunkt hat nur unmittelbaren Einfluss auf die Flächeninhalte der benachbarten Dreiecke.

Die steilste Abstiegsrichtung für diesen Punkt ist ein Vektor im $\mathbb{R}^3$.

Diese Vektoren kann man für jeden Eckpunkt berechnen.

Anschließend verschiebt man jeden Eckpunkt ein klein wenig in Richtung dieser Vektoren.



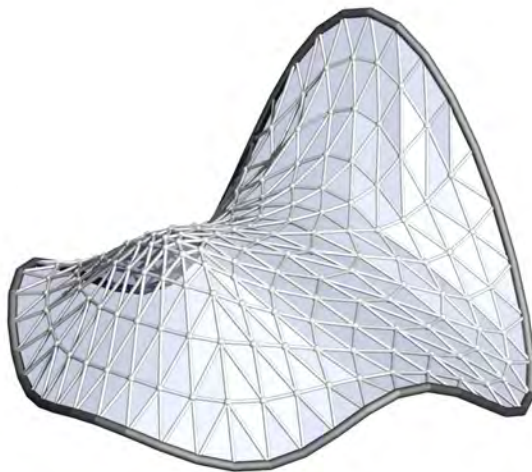
Steilster Abstieg für den Flächeninhalt

Ein einzelner Eckpunkt hat nur unmittelbaren Einfluss auf die Flächeninhalte der benachbarten Dreiecke.

Die steilste Abstiegsrichtung für diesen Punkt ist ein Vektor im $\mathbb{R}^3$.

Diese Vektoren kann man für jeden Eckpunkt berechnen.

Anschließend verschiebt man jeden Eckpunkt ein klein wenig in Richtung dieser Vektoren.



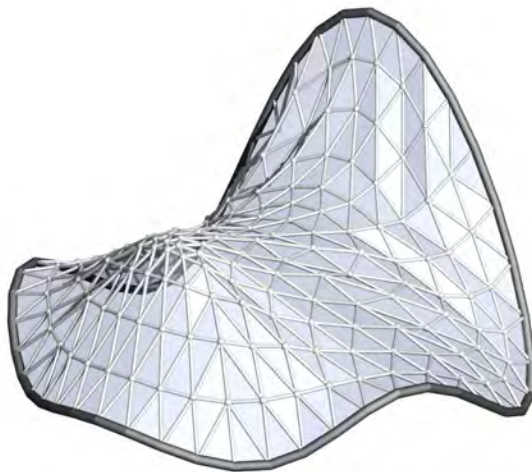
Steilster Abstieg für den Flächeninhalt

Ein einzelner Eckpunkt hat nur unmittelbaren Einfluss auf die Flächeninhalte der benachbarten Dreiecke.

Die steilste Abstiegsrichtung für diesen Punkt ist ein Vektor im $\mathbb{R}^3$.

Diese Vektoren kann man für jeden Eckpunkt berechnen.

Anschließend verschiebt man jeden Eckpunkt ein klein wenig in Richtung dieser Vektoren.



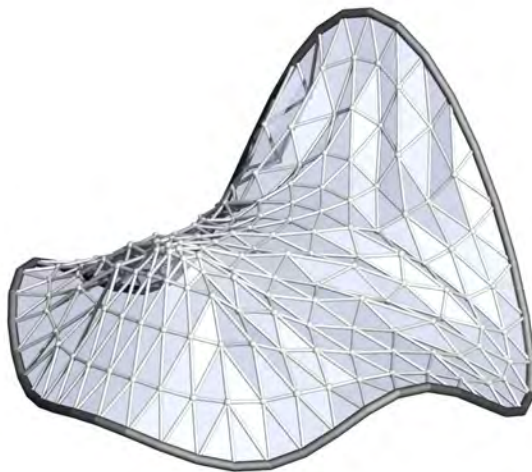
Steilster Abstieg für den Flächeninhalt

Ein einzelner Eckpunkt hat nur unmittelbaren Einfluss auf die Flächeninhalte der benachbarten Dreiecke.

Die steilste Abstiegsrichtung für diesen Punkt ist ein Vektor im $\mathbb{R}^3$.

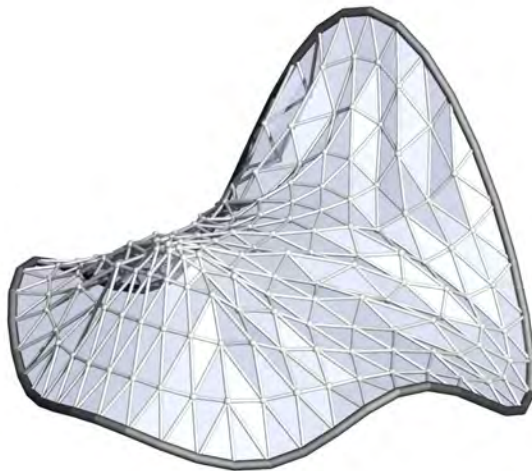
Diese Vektoren kann man für jeden Eckpunkt berechnen.

Anschließend verschiebt man jeden Eckpunkt ein klein wenig in Richtung dieser Vektoren.



Die Wahl des Abstandstandbegriffes ist entscheidend

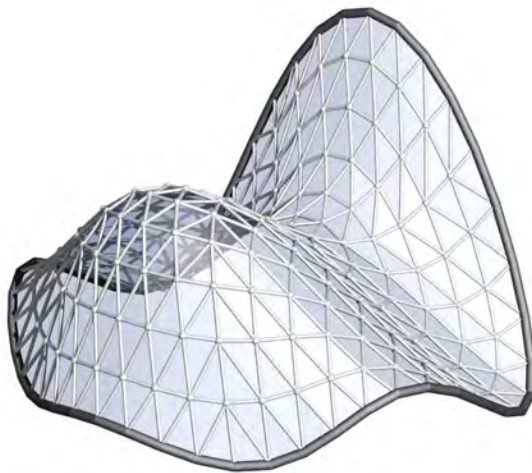
Bei dieser Methode kommen sich die Eckpunkte oft und sehr schnell gefährlich nahe.



Die Wahl des Abstandstandbegriffes ist entscheidend

Bei dieser Methode kommen sich die Eckpunkte oft und sehr schnell gefährlich nahe.

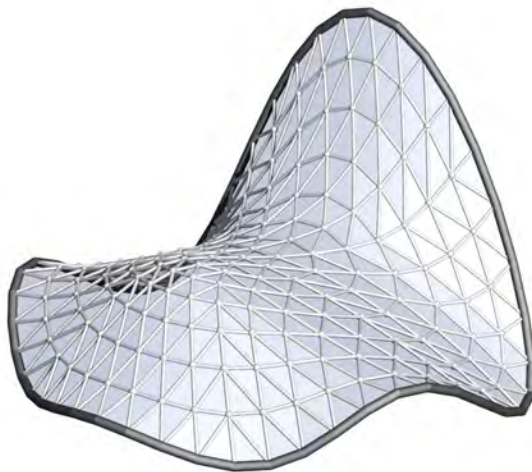
Wählt man im Raum der Flächen aber einen anderen Abstandbegriff, der auch Unterschiede in den Tangenten der Fläche berücksichtigt, so können sich die Eckpunkte rechtzeitig „verständigen“ und man bekommt ein deutlich effizienteres Verfahren.



Die Wahl des Abstandstandbegriffes ist entscheidend

Bei dieser Methode kommen sich die Eckpunkte oft und sehr schnell gefährlich nahe.

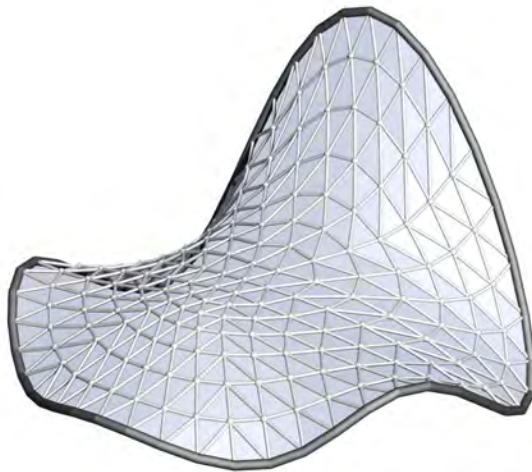
Wählt man im Raum der Flächen aber einen anderen Abstandbegriff, der auch Unterschiede in den Tangenten der Fläche berücksichtigt, so können sich die Eckpunkte rechtzeitig „verständigen“ und man bekommt ein deutlich effizienteres Verfahren.



Die Wahl des Abstandstandbegriffes ist entscheidend

Bei dieser Methode kommen sich die Eckpunkte oft und sehr schnell gefährlich nahe.

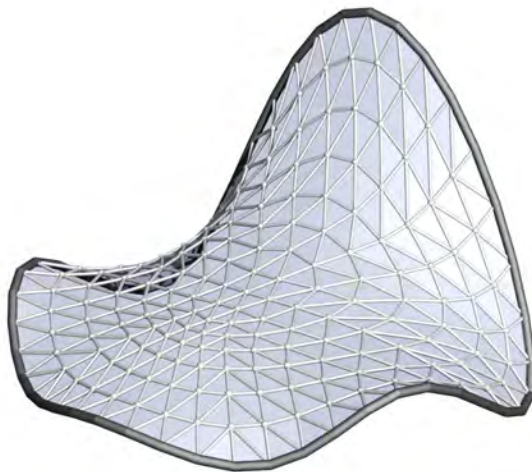
Wählt man im Raum der Flächen aber einen anderen Abstandbegriff, der auch Unterschiede in den Tangenten der Fläche berücksichtigt, so können sich die Eckpunkte rechtzeitig „verständigen“ und man bekommt ein deutlich effizienteres Verfahren.



Die Wahl des Abstandstandbegriffes ist entscheidend

Bei dieser Methode kommen sich die Eckpunkte oft und sehr schnell gefährlich nahe.

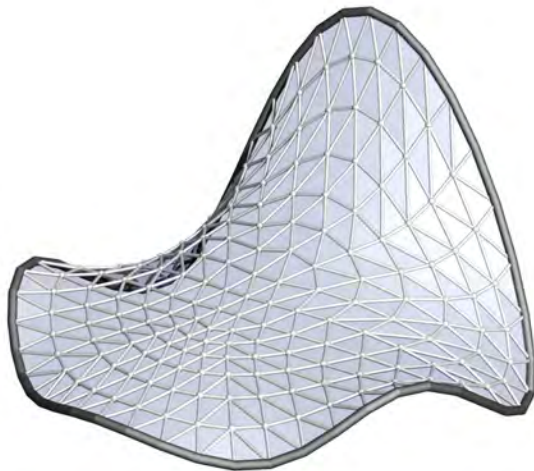
Wählt man im Raum der Flächen aber einen anderen Abstandbegriff, der auch Unterschiede in den Tangenten der Fläche berücksichtigt, so können sich die Eckpunkte rechtzeitig „verständigen“ und man bekommt ein deutlich effizienteres Verfahren.



Die Wahl des Abstandstandbegriffes ist entscheidend

Bei dieser Methode kommen sich die Eckpunkte oft und sehr schnell gefährlich nahe.

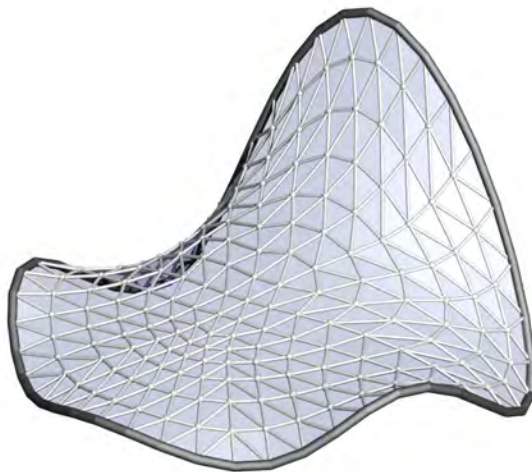
Wählt man im Raum der Flächen aber einen anderen Abstandbegriff, der auch Unterschiede in den Tangenten der Fläche berücksichtigt, so können sich die Eckpunkte rechtzeitig „verständigen“ und man bekommt ein deutlich effizienteres Verfahren.



Die Wahl des Abstandstandbegriffes ist entscheidend

Bei dieser Methode kommen sich die Eckpunkte oft und sehr schnell gefährlich nahe.

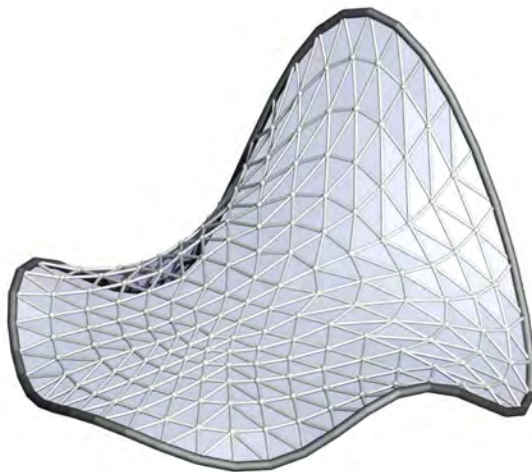
Wählt man im Raum der Flächen aber einen anderen Abstandbegriff, der auch Unterschiede in den Tangenten der Fläche berücksichtigt, so können sich die Eckpunkte rechtzeitig „verständigen“ und man bekommt ein deutlich effizienteres Verfahren.



Die Wahl des Abstandstandbegriffes ist entscheidend

Bei dieser Methode kommen sich die Eckpunkte oft und sehr schnell gefährlich nahe.

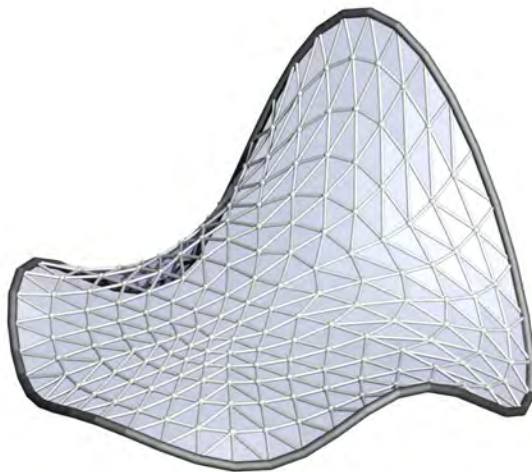
Wählt man im Raum der Flächen aber einen anderen Abstandbegriff, der auch Unterschiede in den Tangenten der Fläche berücksichtigt, so können sich die Eckpunkte rechtzeitig „verständigen“ und man bekommt ein deutlich effizienteres Verfahren.



Die Wahl des Abstandstandbegriffes ist entscheidend

Bei dieser Methode kommen sich die Eckpunkte oft und sehr schnell gefährlich nahe.

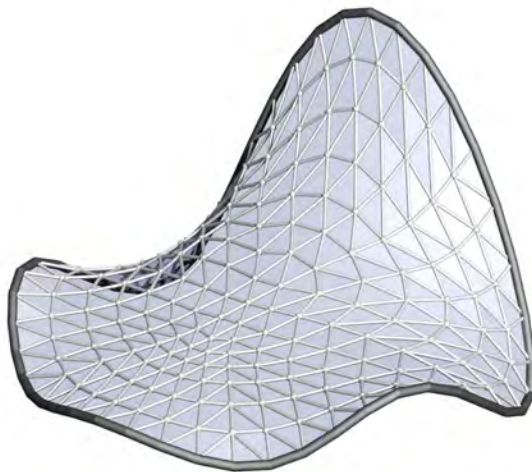
Wählt man im Raum der Flächen aber einen anderen Abstandbegriff, der auch Unterschiede in den Tangenten der Fläche berücksichtigt, so können sich die Eckpunkte rechtzeitig „verständigen“ und man bekommt ein deutlich effizienteres Verfahren.



Die Wahl des Abstandstandbegriffes ist entscheidend

Bei dieser Methode kommen sich die Eckpunkte oft und sehr schnell gefährlich nahe.

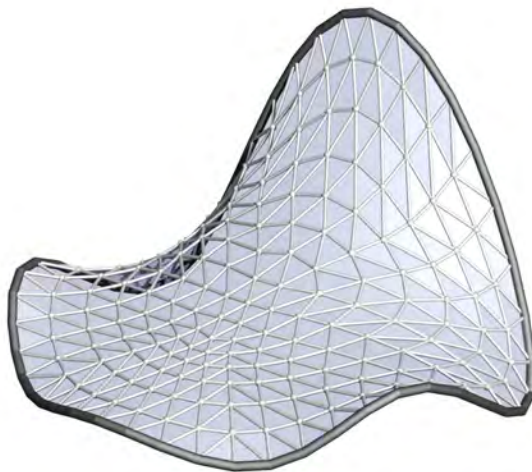
Wählt man im Raum der Flächen aber einen anderen Abstandbegriff, der auch Unterschiede in den Tangenten der Fläche berücksichtigt, so können sich die Eckpunkte rechtzeitig „verständigen“ und man bekommt ein deutlich effizienteres Verfahren.



Die Wahl des Abstandstandbegriffes ist entscheidend

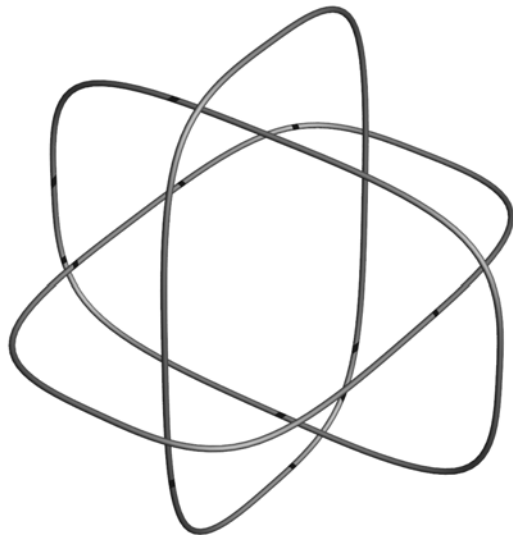
Bei dieser Methode kommen sich die Eckpunkte oft und sehr schnell gefährlich nahe.

Wählt man im Raum der Flächen aber einen anderen Abstandbegriff, der auch Unterschiede in den Tangenten der Fläche berücksichtigt, so können sich die Eckpunkte rechtzeitig „verständigen“ und man bekommt ein deutlich effizienteres Verfahren.



Verfeinerung der Diskretisierung

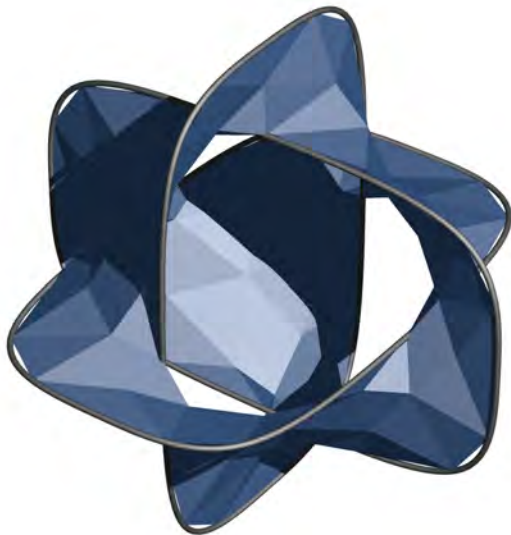
Eine gewichtige Schwierigkeit ist, überhaupt irgendwelche Flächen in die Randkurven zu spannen.



Verfeinerung der Diskretisierung

Eine gewichtige Schwierigkeit ist, überhaupt irgendwelche Flächen in die Randkurven zu spannen.

Hat man aber einen Minimierer für ein grobes Gitter gefunden, kann man das Gitter verfeinern ...

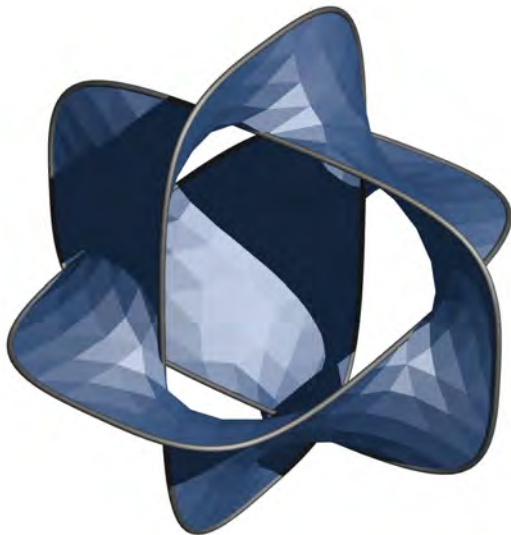


Verfeinerung der Diskretisierung

Eine gewichtige Schwierigkeit ist, überhaupt irgendwelche Flächen in die Randkurven zu spannen.

Hat man aber einen Minimierer für ein grobes Gitter gefunden, kann man das Gitter verfeinern ...

... und wieder aufs Neue minimieren.



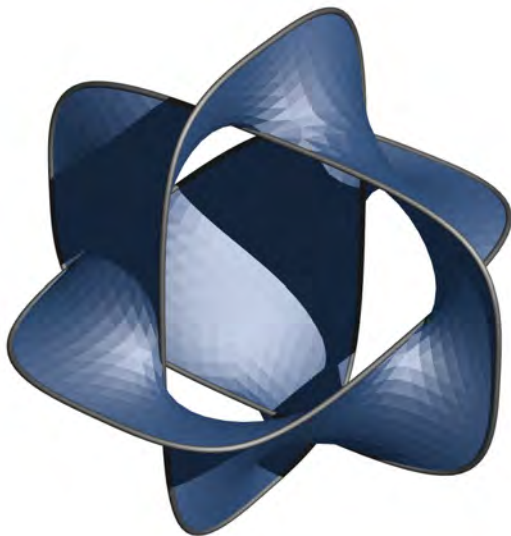
Verfeinerung der Diskretisierung

Eine gewichtige Schwierigkeit ist, überhaupt irgendwelche Flächen in die Randkurven zu spannen.

Hat man aber einen Minimierer für ein grobes Gitter gefunden, kann man das Gitter verfeinern ...

... und wieder aufs Neue minimieren.

Dies kann man so lange wiederholen bis man mit dem Ergebnis zufrieden ist.



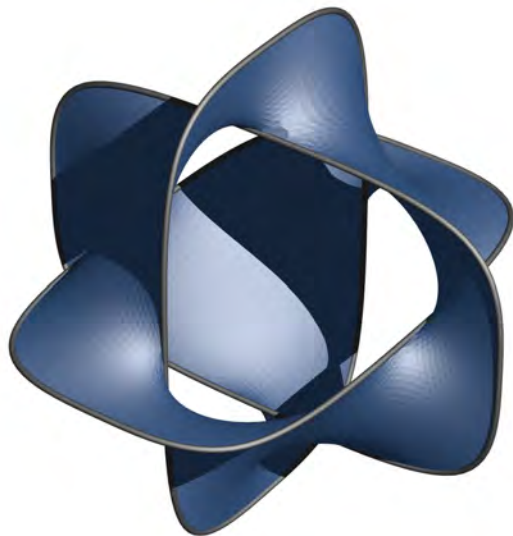
Verfeinerung der Diskretisierung

Eine gewichtige Schwierigkeit ist, überhaupt irgendwelche Flächen in die Randkurven zu spannen.

Hat man aber einen Minimierer für ein grobes Gitter gefunden, kann man das Gitter verfeinern ...

... und wieder aufs Neue minimieren.

Dies kann man so lange wiederholen bis man mit dem Ergebnis zufrieden ist.



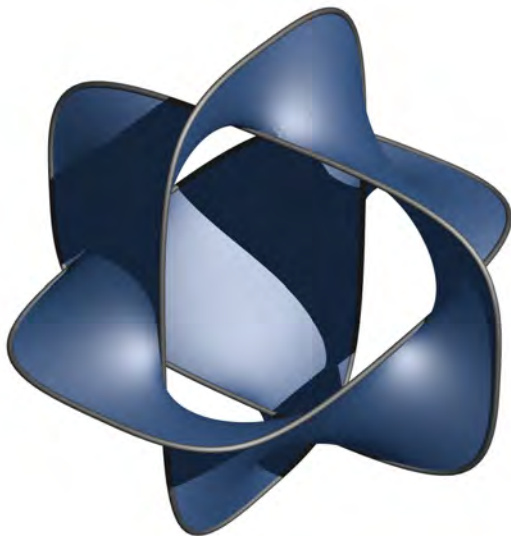
Verfeinerung der Diskretisierung

Eine gewichtige Schwierigkeit ist, überhaupt irgendwelche Flächen in die Randkurven zu spannen.

Hat man aber einen Minimierer für ein grobes Gitter gefunden, kann man das Gitter verfeinern ...

...und wieder aufs Neue minimieren.

Dies kann man so lange wiederholen bis man mit dem Ergebnis zufrieden ist.



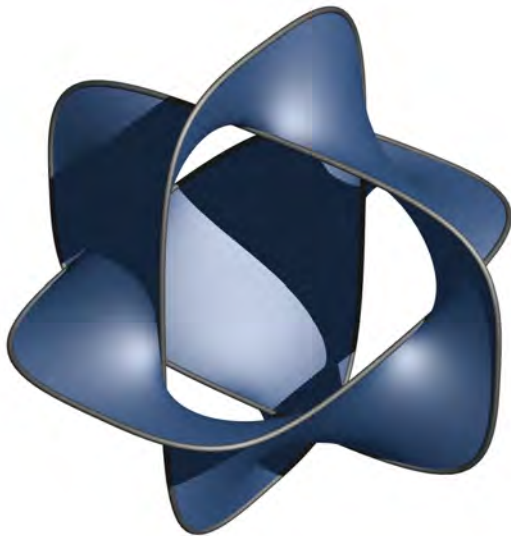
Verfeinerung der Diskretisierung

Eine gewichtige Schwierigkeit ist, überhaupt irgendwelche Flächen in die Randkurven zu spannen.

Hat man aber einen Minimierer für ein grobes Gitter gefunden, kann man das Gitter verfeinern ...

...und wieder aufs Neue minimieren.

Dies kann man so lange wiederholen bis man mit dem Ergebnis zufrieden ist.



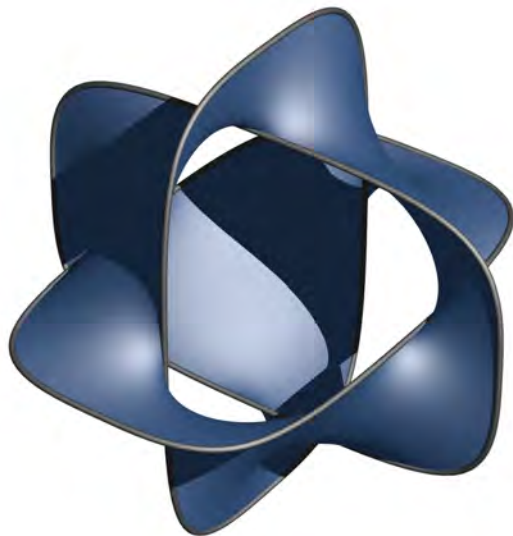
Verfeinerung der Diskretisierung

Eine gewichtige Schwierigkeit ist, überhaupt irgendwelche Flächen in die Randkurven zu spannen.

Hat man aber einen Minimierer für ein grobes Gitter gefunden, kann man das Gitter verfeinern ...

...und wieder aufs Neue minimieren.

Dies kann man so lange wiederholen bis man mit dem Ergebnis zufrieden ist.



Konvergenz der Lösungen

Aber wann kann man eigentlich mit dem Ergebnis zufrieden sein?

Konvergenz der Lösungen

Aber wann kann man eigentlich mit dem Ergebnis zufrieden sein?

Vorgegeben sei eine Toleranz $\varepsilon > 0$ und ein Abstandsmaß auf dem Raum der Flächen.

Konvergenz der Lösungen

Aber wann kann man eigentlich mit dem Ergebnis zufrieden sein?

Vorgegeben sei eine Toleranz $\varepsilon > 0$ und ein Abstandsmaß auf dem Raum der Flächen.

Wünschenswert wäre dann eine Aussage wie:

Konvergenz der Lösungen

Aber wann kann man eigentlich mit dem Ergebnis zufrieden sein?

Vorgegeben sei eine Toleranz $\varepsilon > 0$ und ein Abstandsmaß auf dem Raum der Flächen.

Wünschenswert wäre dann eine Aussage wie:

Es gibt eine Verfeinerung $n(\varepsilon)$ des diskreten Problems, so dass gilt:

- 1 *Für jede diskrete Lösung $f_n \in C_n$ gibt es auch eine kontinuierliche Lösung $f \in C$ mit Abstand $\leq \varepsilon$.*

Konvergenz der Lösungen

Aber wann kann man eigentlich mit dem Ergebnis zufrieden sein?

Vorgegeben sei eine Toleranz $\varepsilon > 0$ und ein Abstandsmaß auf dem Raum der Flächen.

Wünschenswert wäre dann eine Aussage wie:

Es gibt eine Verfeinerung $n(\varepsilon)$ des diskreten Problems, so dass gilt:

- ① *Für jede diskrete Lösung $f_n \in C_n$ gibt es auch eine kontinuierliche Lösung $f \in C$ mit Abstand $\leq \varepsilon$.*
- ② *Für jede kontinuierliche Lösung $f \in C$ gibt es auch eine diskrete Lösung $f_n \in C_n$ mit Abstand $\leq \varepsilon$.*

Anwendungen von Konvergenzanalyse

Ähnliche Diskretisierungstechniken werden auch bei Simulationen physikalischer Vorgänge oder bei Belastungsrechnungen in der Industrie (Maschinenbau, Baustatik, etc.) verwendet.

Anwendungen von Konvergenzanalyse

Ähnliche Diskretisierungstechniken werden auch bei Simulationen physikalischer Vorgänge oder bei Belastungsrechnungen in der Industrie (Maschinenbau, Baustatik, etc.) verwendet.

Deswegen ist es sehr wertvoll zu wissen, inwieweit man den Berechnungen trauen kann.

Anwendungen von Konvergenzanalyse

Ähnliche Diskretisierungstechniken werden auch bei Simulationen physikalischer Vorgänge oder bei Belastungsrechnungen in der Industrie (Maschinenbau, Baustatik, etc.) verwendet.

Deswegen ist es sehr wertvoll zu wissen, inwieweit man den Berechnungen trauen kann.

Warum behandle ich denn dann ausgerechnet Minimalflächen?

Anwendungen von Konvergenzanalyse

Ähnliche Diskretisierungstechniken werden auch bei Simulationen physikalischer Vorgänge oder bei Belastungsrechnungen in der Industrie (Maschinenbau, Baustatik, etc.) verwendet.

Deswegen ist es sehr wertvoll zu wissen, inwieweit man den Berechnungen trauen kann.

Warum behandle ich denn dann ausgerechnet Minimalflächen?

- 1 Wenn man etwas Neues ausprobiert, ist es hilfreich, mit relativ „einfachen“ aber charakteristischen Beispielen zu beginnen.

Anwendungen von Konvergenzanalyse

Ähnliche Diskretisierungstechniken werden auch bei Simulationen physikalischer Vorgänge oder bei Belastungsrechnungen in der Industrie (Maschinenbau, Baustatik, etc.) verwendet.

Deswegen ist es sehr wertvoll zu wissen, inwieweit man den Berechnungen trauen kann.

Warum behandle ich denn dann ausgerechnet Minimalflächen?

- 1 Wenn man etwas Neues ausprobiert, ist es hilfreich, mit relativ „einfachen“ aber charakteristischen Beispielen zu beginnen.
- 2 Man braucht ein gewissen Vorabwissen über die Lösungen des kontinuierlichen Problems. Dieses Wissen war für Minimalflächen schon vorhanden.

Anwendungen von Konvergenzanalyse

Ähnliche Diskretisierungstechniken werden auch bei Simulationen physikalischer Vorgänge oder bei Belastungsrechnungen in der Industrie (Maschinenbau, Baustatik, etc.) verwendet.

Deswegen ist es sehr wertvoll zu wissen, inwieweit man den Berechnungen trauen kann.

Warum behandle ich denn dann ausgerechnet Minimalflächen?

- ➊ Wenn man etwas Neues ausprobiert, ist es hilfreich, mit relativ „einfachen“ aber charakteristischen Beispielen zu beginnen.
- ➋ Man braucht ein gewissen Vorabwissen über die Lösungen des kontinuierlichen Problems. Dieses Wissen war für Minimalflächen schon vorhanden.
- ➌ Ich finde Minimalflächen schön.

