

Komplexe Zahlen

Facharbeit

im Leistungskurs Mathematik

Söderblom-Gymnasium
Espelkamp

Jahrgangsstufe 12
Schuljahr 2010/2011

Verfasser: Philip Kramer
Fachlehrerin: Frau Hanheide
Bearbeitungszeit: 6 Wochen
Abgabetermin: 14.03.2011

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung - Was sind komplexe Zahlen?	3
1.1	Quadratische Gleichungen	3
1.2	Die imaginäre Einheit i - komplexe Zahlen	3
1.3	Geschichte der komplexen Zahlen	4
2	Rechnen mit komplexen Zahlen	4
2.1	Erste Idee	4
2.2	Darstellung von komplexen Zahlen	4
2.3	Addition komplexer Zahlen	5
2.4	Polardarstellung	5
2.5	Multiplikation komplexer Zahlen	6
3	Komplexe Funktionen	8
3.1	Was sind komplexe Funktionen?	8
3.2	Die lineare Funktion	8
3.3	Darstellung komplexer Funktionen	9
4	Phasenplot	9
4.1	Was ist ein Phasenplot?	9
4.2	Die identische Abbildung $f(z) = z$	11
4.3	Polynome - ganzrationale Funktionen	11
4.4	Gebrochen-rationale Funktionen	12
4.5	Nullstellen und Polstellen	12
5	Fazit	13
6	Literatur	15
7	Erklärung über selbständiges Anfertigen	15

1 Einleitung - Was sind komplexe Zahlen?

1.1 Quadratische Gleichungen

Den meisten werden quadratische Gleichungen bekannt sein. Diese löst man mit der pq-Formel, die entweder eine, zwei oder keine Lösung liefert. Als Lösungen der Gleichung $x^2 - x - 2 = 0$ ergeben sich zum Beispiel -1 und 2 .

Für die normierte quadratische Gleichung

$$x^2 + px + q = 0$$

sind die allgemeinen Lösungen :

$$x_{1/2} = -\frac{1}{2}p \pm \sqrt{\frac{1}{4}p^2 - q} .$$

Für die Gleichung $x^2 + 1 = 0$, also $x^2 = -1$, gibt es in $\mathbb{R}$ aber keine Lösung. Dies sieht man auch.

Angenommen, es gibt eine Zahl $l \in \mathbb{R}$, die Lösung der Gleichung ist, dann gilt entweder $l < 0$, $l = 0$ oder $l > 0$. Ist l positiv, so ist l^2 auch positiv, also $l^2 \neq -1$. Ist $l = 0$, dann ist $l^2 = 0 \neq -1$. Ist l negativ, lässt es sich als $l = -1 \cdot m$ mit $m \in \mathbb{R}^+$ schreiben. Dann ergibt sich

$$l^2 = (-1)^2 m^2 = 1 \cdot m^2 > 0 , also$$

$$l^2 \neq -1 .$$

Da aber für alle Zahlen aus $\mathbb{R}$ eine der drei oben genannten Bedingungen gelten muss, kann l nicht in $\mathbb{R}$ enthalten sein.

Das gilt allgemein, wenn die Diskriminante $D = \frac{1}{4}p^2 - q$ negativ ist.

1.2 Die imaginäre Einheit i - komplexe Zahlen

Um auch Gleichungen dieser Art lösen zu können, definiert man die **imaginäre Einheit** i durch

$$i^2 = -1 . \tag{1}$$

Damit hat die Gleichung $x^2 = -1$ *zwei* Lösungen, nämlich $+i$ und $-i$.

Betrachten wir nun die Gleichung

$$x^2 + 2x + 5 = 0$$

die Lösungen, die die pq-Formel liefert, sind :

$$x_{1/2} = -1 \pm \sqrt{-4} .$$

Mit der "neuen Zahl" i ergibt sich

$$-1 \pm \sqrt{-4} = -1 \pm \sqrt{-1}\sqrt{4} = -1 \pm 2i ,$$

also zwei Zahlen, die sich aus einem reellen Vielfachen von i und einer reellen Zahl zusammensetzen.
Das ist eine komplexe Zahl!

Allgemein hat eine komplexe Zahl $z \in \mathbb{C}$, wobei $\mathbb{C}$ den Körper der komplexen Zahlen bezeichnet, die Form

$$z = a + bi \text{ mit } a, b \in \mathbb{R} .$$

Die komplexen Zahlen enthalten die reellen als Sonderfall. Eine komplexe Zahl ist nämlich genau dann reell, wenn $b = 0$ ist. Zahlen mit $a = 0$, also der Form $z = bi$ werden imaginär genannt.

Wie man mit komplexen Zahlen rechnet, wie Funktionen $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ zu deuten sind und wie man komplexe Funktionen darstellen kann, soll Thema dieser Facharbeit sein.

1.3 Geschichte der komplexen Zahlen

Es brauchte lange, bis die komplexen Zahlen in der Mathematik akzeptiert wurden. 1545 spricht Cardano von komplexen Zahlen als “falschen Lösungen”. Als erstem gelang es Rafael Bombelli 1572 grundlegende Rechenoperationen mit komplexen Zahlen durchzuführen. Das heißt aber noch lange nicht, dass sie deswegen als “richtige” Zahlen anerkannt wurden. Heute heißen Zahlen der Form $z = bi$ mit $b \in \mathbb{R}$ immer noch imaginär, also Zahlen, die nur in der Vorstellung existieren.

Dieses Problem ist aber nicht erst mit den komplexen bzw. imaginären Zahlen entstanden. Auch negative Zahlen und die null brauchten einige Zeit, um akzeptiert zu werden.

Historisch gesehen wurde der Begriff der Zahl, beginnend bei den natürlichen Zahlen, durch Hinzuziehen der Brüche auf die Menge der positiven rationalen Zahlen und dann mit den irrationalen Zahlen auf die Menge der positiven reellen Zahlen erweitert. Erst danach wurden langsam auch die null und die negativen Zahlen dazu gezählt. Dadurch aber entstehen beim Rechnen viele lästige Fallunterscheidungen.

Dennoch wurden negative und sogar komplexe Zahlen vor dem Akzeptieren ihrer Existenz in Berechnungen benutzt. Es gibt Gleichungen dritten Grades, die reelle Lösungen haben, aber in Zwischenschritten bei der Berechnung der Lösungen Quadratwurzeln negativer Zahlen enthalten.

Mit dem *Fundamentalsatz der Algebra* von Gauß 1799 wurde die Wichtigkeit der komplexen Zahlen bewiesen¹ und im 19. Jahrhundert wurden komplexe Zahlen dann auch in Zahlentheorie und Analysis ernsthaft betrachtet. Bis die komplexen Zahlen vollständig mathematisch “beherrschbar” wurden, verging dennoch eine lange Zeit.²

2 Rechnen mit komplexen Zahlen

2.1 Erste Idee

Für die komplexen Zahlen gelten natürlich auch Rechenregeln. Rechnet man mit i wie mit einer reellen Zahl, leiten sich daraus und aus Gleichung 1 folgende Formeln ab

$$(a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i \quad (2)$$

$$\begin{aligned} (a + bi) \cdot (c + di) &= ac + adi + bci + bdi^2 \\ &= ac - bd + adi + bci \end{aligned}$$

$$(a + bi) \cdot (c + di) = (ac - bd) + (ad + bc)i . \quad (3)$$

Das sind im Grunde schon die Addition und Multiplikation von komplexen Zahlen. Wie man dies deuten kann, wird in den Abschnitten 2.3 und 2.5 erläutert.

2.2 Darstellung von komplexen Zahlen

Komplexe Zahlen sind geordnete Paare von reellen Zahlen. $a + bi$ ist die *Summenschreibweise*, $(a; b)$ bezeichnet man als *Paarschreibweise*. Eine komplexe Zahl $z = a + bi = (a; b)$ hat einen Realteil

$$\operatorname{Re}(z) = \Re(z) = a$$

und einen Imaginärteil

$$\operatorname{Im}(z) = \Im(z) = b .$$

Paare von Zahlen werden verwendet, um Punkte der Ebene darzustellen. Ordnet man jeder komplexen Zahl $a + bi$ den Punkt $(a; b)$ zu, so sind dies Punkte der *Gaußschen Zahlenebene*³. Zu jeder Zahl gehört ein Punkt und umgekehrt.⁴

Komplexe Zahlen können auch noch auf eine andere Weise dargestellt werden.

¹Der Fundamentalsatz besagt, dass jedes Polynom vom Grad $n \geq 1$ in ein Produkt von n Linearfaktoren mit komplexen Koeffizienten zerlegbar ist.

²Ganzer Abschnitt sinngemäß vgl. Pieper, Herbert: Die komplexen Zahlen. Theorie Praxis Geschichte, Berlin 1984, S.193-200

³Die Namen Argandsche Zahlenebene und komplexe Ebene werden auch verwendet. Benutze ich in diesem Text die Formulierung “Zahlenebene”, ist damit die Gaußsche/Argandsche/komplexe Zahlenebene gemeint.

⁴Hat die Zahl $\xi = a + bi$ einen ganzzahligen Imaginär- und Realteil, wird sie als *Gaußsche Zahl* bezeichnet. Die Gaußschen Zahlen sind die Gitterpunkte in der komplexen Zahlenebene und ermöglichen zum Beispiel die Betrachtung von Teilbarkeit komplexer Zahlen, womit auch der Begriff der Primzahl auf $\mathbb{C}$ erweitert werden kann.

Wir ordnen der Zahl $z \in \mathbb{C}$ jenen Vektor der Zahlenebene zu, der durch einen vom Nullpunkt O ausgehenden, zum Punkt z führenden Pfeil $\vec{Oz}$ repräsentiert wird.

(...)

Auch bei dieser Interpretation der komplexen Zahlen ist es so, dass eine unkehrbar eindeutige Zuordnung hergestellt wird: Jeder Zahl entspricht genau ein Vektor (...) und jedem Vektor eine Zahl z (...).⁵

2.3 Addition komplexer Zahlen

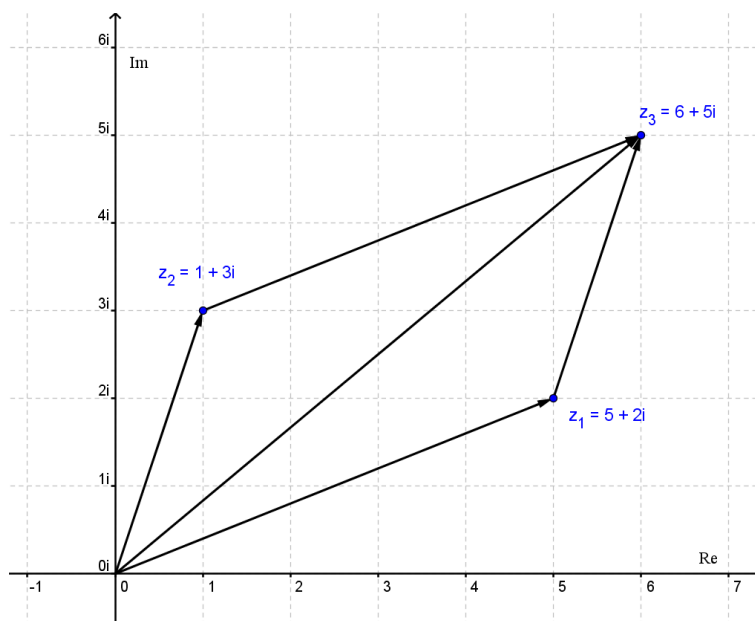


Abbildung 1: Die Addition von zwei komplexen Zahlen

Aus Gleichung 2 ist bekannt: *durch $(a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i$ ist die Addition von zwei komplexen Zahlen gegeben.* Das entspricht der vektoriellen Addition der entsprechenden Vektoren.

Sollen zum Beispiel $z_1 = 5 + 2i$ und $z_2 = 1 + 3i$ addiert werden, ergibt sich

$$(5 + 2i) + (1 + 3i) = 6 + 5i .$$

In Abbildung 1 soll dies wie beschrieben geometrisch veranschaulicht werden.

2.4 Polardarstellung

Die Polardarstellung ist ein anderer Weg, die Lage einer komplexen Zahl in der Gaußschen Zahlenebene zu beschreiben. Die bisher benutzte Art $a + bi$ sagt, wie weit der Punkt bzw. die Zahl z von den beiden Achsen entfernt ist.

$z = 2 + 5i$ heißt also : “die Zahl z befindet sich 2 Einheiten nach rechts und 5 Einheiten nach oben”.

Die Alternative ist die *Polardarstellung*

$$z = |z|E(\varphi) .^{67}$$

Hier beschreibt $|z|$ die Länge des zu z gehörenden Vektors und $E(\varphi)$ seine Richtung. Betrachtet man die Zahl z in der Zahlenebene, sieht man wie in Abbildung 2 die Zusammenhänge

$$a = |z| \cos(\varphi)$$

$$b = |z| \sin(\varphi) .$$

Daraus ergibt sich

$$a + bi = |z| (\cos(\varphi) + i \sin(\varphi))$$

mit $\varphi = \arg(z)$.

⁵Entnommen aus: Dittmann, Helmut: komplexe Zahlen. Ein Lehr- und Arbeitsbuch, München 1977, S.30

⁶Darstellung $E(\varphi)$ aus: Dittmann, Helmut: komplexe Zahlen. Ein Lehr- und Arbeitsbuch, München 1977, S.33

⁷Die Schreibweise $|z|e^{i\varphi}$ ist auch geläufig. Warum $\cos(\varphi) + i \sin(\varphi) = e^{i\varphi}$ gilt, werde ich nicht erläutern oder beweisen, weil dies zu umfangreich wäre, aber auch nicht benutzen.

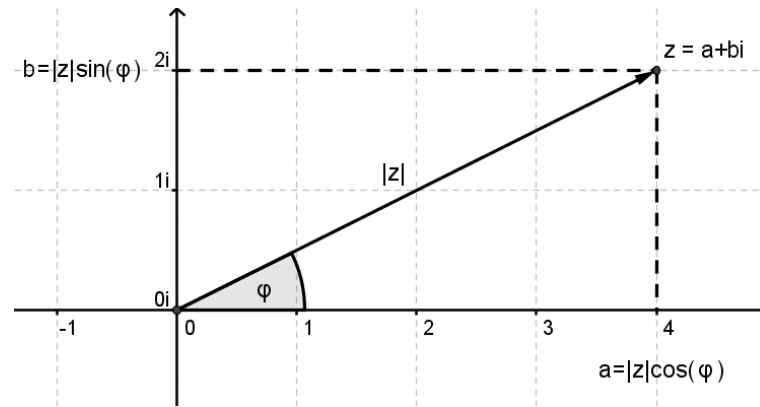


Abbildung 2: Die Polardarstellung einer komplexen Zahl

(Dabei beschreibt das Argument $\varphi = \arg(z)$ den Winkel, um den der Zeiger von $\vec{Oz}$ (gegen den Uhrzeigersinn) (...) aus der Achse der positiven reellen Zahlen herausgedreht ist.⁸

Für $\cos(\varphi) + i \sin(\varphi)$ schreibt man $E(\varphi)$, woraus sich dann die anfänglich genannte Schreibweise ergibt.

Zu unterscheiden sind das Argument $\varphi = \arg(z)$ und die Phase einer komplexen Zahl. Das Argument ist der Winkel, der oben beschrieben ist. Die Phase beschreibt $\frac{z}{|z|}$, ist also im Gegensatz zum Argument eindeutig. Das Argument wird erst eindeutig, wenn man es nur im Intervall $] -\pi, \pi]$ oder $[0, 2\pi[$ definiert. Sonst ergäben zwei Argumente die gleiche Phase, wenn sie sich um ein Vielfaches von 2π unterschieden. In den meisten Fällen wird aber nicht zwischen Phase und Argument unterschieden.⁹

Der Betrag einer komplexen Zahl lässt sich ganz einfach mit dem *Satz des Pythagoras berechnen*. Es gilt

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2} \quad (4)$$

Außerdem gilt

$$|E(\varphi)| = \sqrt{\cos(\varphi)^2 + \sin(\varphi)^2} = \sqrt{1} = 1,$$

also ist $E(\varphi)$ ein Einheitsvektor und beschreibt wirklich nur die Richtung.

2.5 Multiplikation komplexer Zahlen

Mit der neu gewonnenen Weise eine komplexe Zahl darzustellen kann man auch die Multiplikation geometrisch deuten. Sollen $z_1 = |z_1|E(\varphi)$ und $z_2 = |z_2|E(\psi)$ multipliziert werden, ist das Ergebnis

$$\begin{aligned} z_1 z_2 &= |z_1| |z_2| E(\varphi) E(\psi) \\ &= |z_1| |z_2| ((\cos(\varphi) + i \sin(\varphi)) ((\cos(\psi) + i \sin(\psi))) \\ &= |z_1| |z_2| \left(\cos(\varphi) \cos(\psi) - \sin(\varphi) \sin(\psi) + i(\cos(\varphi) \sin(\psi) + \sin(\varphi) \cos(\psi)) \right) \end{aligned} \quad (5)$$

Das sieht noch nicht besonders beeindruckend aus, aber mit den Additionstheoremen

$$\begin{aligned} \cos(\varphi + \psi) &= \cos \varphi \cos \psi - \sin \varphi \sin \psi \\ \sin(\varphi + \psi) &= \cos \varphi \sin \psi + \sin \varphi \cos \psi \end{aligned}$$

ergibt sich aus Gleichung 5

$$\begin{aligned} E(\varphi) E(\psi) &= \left(\cos(\varphi) \cos(\psi) - \sin(\varphi) \sin(\psi) + i(\cos(\varphi) \sin(\psi) + \sin(\varphi) \cos(\psi)) \right) \\ E(\varphi) E(\psi) &= \cos(\varphi + \psi) + i \sin(\varphi + \psi) \\ E(\varphi) E(\psi) &= E(\varphi + \psi) \end{aligned}$$

⁸Entnommen aus: Dittmann, Helmut: komplexe Zahlen. Ein Lehr- und Arbeitsbuch, München 1977, S.32

⁹Vgl. Wegert, Elias: Phase Plots of Complex Functions: a Journey in Illustration, S.2, auf http://arxiv.org/PS_cache/arxiv/pdf/1007/1007.2295v1.pdf, 14.07.2010

und damit für die Multiplikation

$$z_1 z_2 = |z_1| |z_2| E(\varphi + \psi) .$$

Geometrisch interpretiert heißt das : die Multiplikation von zwei komplexen Zahlen geschieht durch die Addition ihrer Argumente und Multiplikation ihrer Beträge. Man dreht also den Vektor der einen

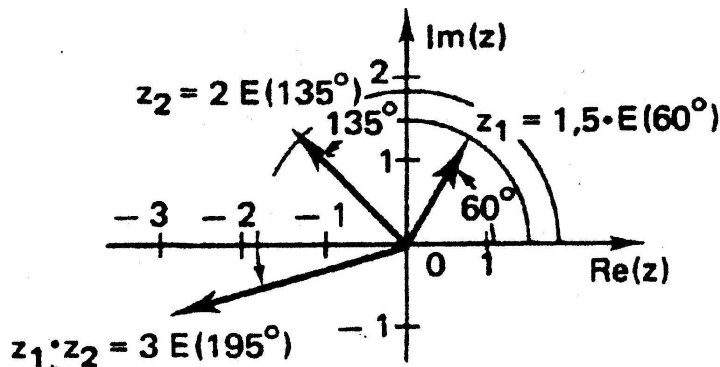


Abbildung 3: Die Multiplikation von zwei komplexen Zahlen

Zahl gegen den Uhrzeigersinn um das Argument der anderen Zahl und multipliziert die Beträge, wie in Abbildung¹⁰ 3 zu sehen ist.

Eine weitere Formel, die für spätere Betrachtungen benutzt wird, ist

$$\frac{1}{E(\varphi)} = E(-\varphi) ,$$

die einfach hergeleitet werden kann.

$$1 = \cos(0) + i \sin(0)$$

$$1 = E(0)$$

$$1 = E(\varphi - \varphi)$$

$$1 = E(\varphi + (-\varphi))$$

$$1 = E(\varphi)E(-\varphi)$$

$$\frac{1}{E(\varphi)} = E(-\varphi)$$

Noch ein wichtiger Satz ist der *Satz von de Moivre*, der Folgendes besagt:

$$(E(\varphi))^n = E(n\varphi) \text{ mit } n \in \mathbb{Z} . \quad (6)$$

Dies möchte ich mit vollständiger Induktion beweisen.

Beweis

Induktionsanfang: $k = 1$. Dies gilt, wie man sieht, da

$$(E(\varphi))^1 = E(1\varphi) .$$

Multipliziert man beide Seiten von Gleichung 6 mit $E(\varphi)$, gibt dies

$$(E(\varphi))^k E(\varphi) = E(k\varphi) E(\varphi)$$

$$(E(\varphi))^{k+1} = E(k\varphi + \varphi)$$

$$(E(\varphi))^{k+1} = E((k+1)\varphi) ,$$

¹⁰Abbildung aus: Poenitz, Arne: Die komplexe Zahlenebene, S.3,
auf [http://www.poenitz-net.de/Mathematik/8.Komplexe Zahlen/8.4.S.Zahlenebene.pdf](http://www.poenitz-net.de/Mathematik/8.Komplexe%20Zahlen/8.4.S.Zahlenebene.pdf)

womit die Behauptung für $n \in \mathbb{N}$ bewiesen wäre. Jetzt fehlt noch der Fall $n < 1$. Dafür werden Induktionsanfang und -annahme beibehalten, es wird aber durch Multiplikation mit $\frac{1}{E(\varphi)}$ gezeigt, dass die Induktionsannahme die Gültigkeit für $k - 1$ impliziert.

$$\begin{aligned}(E(\varphi))^k &= E(k\varphi) \\ \frac{(E(\varphi))^k}{E(\varphi)} &= E(k\varphi) \frac{1}{E(\varphi)} \\ (E(\varphi))^{k-1} &= E(k\varphi) E(-\varphi) \\ (E(\varphi))^{k-1} &= E(k\varphi - \varphi) \\ (E(\varphi))^{k-1} &= E((k-1)\varphi) .\end{aligned}$$

Damit ist die Behauptung für alle ganzen Zahlen n bewiesen, die größer, kleiner oder gleich 1 sind, also für alle $n \in \mathbb{Z}$.

□

3 Komplexe Funktionen

3.1 Was sind komplexe Funktionen?

Wie bei den reellen Zahlen kann man auch in $\mathbb{C}$ Funktionen definieren.

Eine komplexe Funktion f ordnet jedem z aus dem Definitionsbereich $D \subset \mathbb{C}$ eindeutig eine komplexe Zahl $w \in \mathbb{C}$ zu.

Der Funktion entspricht in der Zahlenebene eine Abbildung, die jedem Originalpunkt $P(z)$ den Bildpunkt $P(w)$ zuordnet.

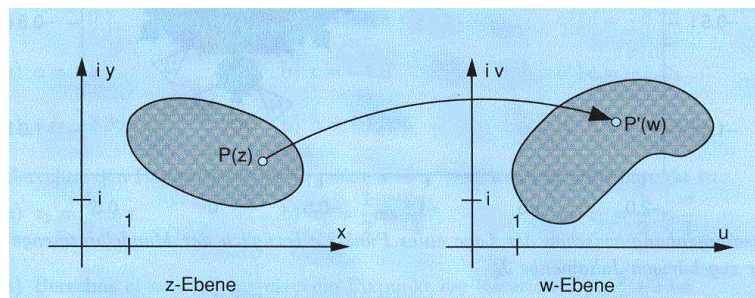


Abbildung 4: Komplexe Funktion

Für die Darstellung der zugehörigen Abbildung kann man zwei Exemplare der Zahlenebene verwenden, die z-Ebene für die Originalpunkte oder Urbildpunkte und die w-Ebene für die Bildpunkte.¹¹

Einige komplexe Funktionen sind zum Beispiel :

- e^z
- $\sin z$
- $az + b$
- $\frac{z-4i}{z^2+z+1}$

Welche Probleme sich bei der Darstellung von komplexen Funktionen ergeben, wie man diese mehr oder weniger "lösen" kann, was geometrisch mit der Zahlenebene passiert, etc. wird in den folgenden Abschnitten in Ansätzen behandelt.

3.2 Die lineare Funktion

Die Funktionen, die durch

$$f(z) = az + b \text{ mit } a, b \in \mathbb{C}$$

¹¹Mit Abbildung entnommen aus: Gühr, Marcel: Komplexe Zahlen, S.32, auf [http://www.mguehr.ch/Skript Komplexe Zahlen.pdf](http://www.mguehr.ch/Skript%20Komplexe%20Zahlen.pdf), 2008

gegeben sind, werden als *lineare Funktionen* bezeichnet¹². Was im Einzelnen geschieht, wenn man die z -Ebene mit einer solchen Funktion abbildet, sieht man am besten, wenn man die Funktion f als Verkettung von zwei Funktionen g und h wie folgt auffasst¹³

$$\begin{aligned}g(z) &= az \\h(z) &= z + b \\f(z) &= (h \circ g)(z) = h(g(z)) = az + b.\end{aligned}$$

Zuerst wird die Funktion g betrachtet. Stellt man z und a in Polarform mit $\alpha = \arg(a)$ und $\varphi = \arg(z)$ dar, ergibt sich für $g(z)$

$$g(z) = |a| |z| E(\alpha) E(\varphi) = |a| |z| E(\alpha + \varphi),$$

es wird also für jeden Punkt der Ebene der zugehörige Vektor um den Faktor $|a| \in \mathbb{R}$ gestreckt und um den Winkel φ gedreht. *Die Multiplikation mit einer komplexen Zahl entspricht einer Drehstreckung der Ebene.*

Weiter zur Funktion h . Die Funktion h ist eine Translation der Ebene. In Abschnitt 2.3 wird beschrieben, dass die Addition von komplexen Zahlen eine vektorielle Addition der entsprechenden Vektoren bedeutet. An den Vektor jeder Zahl $z \in \mathbb{C}$ wird also der Vektor von a "angehängt", es wird also die ganze Ebene verschoben.

Die Verkettung $f = h \circ g$ entspricht einer Hintereinanderausführung von g und h . Die Funktion f macht also zuerst eine Drehstreckung und dann eine Translation¹⁴.

Dabei werden einige geometrische Eigenschaften erhalten. So wird zum Beispiel ein Dreieck immer auf ein ähnliches abgebildet, wenn $a \neq 0$. Die lineare Funktion führt eine Verschiebung und eine Drehstreckung aus, also eine Verschiebung, eine Drehung und eine Streckung. Das Bild Dreieck zu einem Dreieck in der komplexen Ebene entsteht durch die erwähnten drei Abbildungen. Nun sind zwei Dreiecke aber ähnlich, wenn sie durch eben diese drei Abbildungen in einander überführt werden können.

Desweiteren bleibt der Drehsinn dabei erhalten, die lineare Funktion ist wegen dieser Eigenschaften eine *gleichsinnige Ähnlichkeitsabbildung*¹⁵.

3.3 Darstellung komplexer Funktionen

Reelle Funktionen können bekanntermaßen recht anschaulich dargestellt werden. Man zeichnet ein 2-dimensionales Koordinatensystem, in dem die eine Achse die Originalwerte und die andere die Funktionswerte repräsentiert. So erhält man dann Geraden, Parabeln, Sinuskurven, Halbkreise, etc.

Eine komplexe Funktion bildet die Ebene der Originalpunkte auf die der Bildpunkte ab. Will man dies darstellen, steht man vor dem Problem, dass man 4 Dimensionen darstellen muss, was schwierig ist.

Ein Lösungsansatz ist die *analytische Landschaft*, die jeder Zahl der Ebene einen Höhenwert auf einer z -Achse¹⁶ zuordnet. Dieser ist der Betrag des Funktionswertes an der jeweiligen Stelle. Ein Beispiel sieht man in Abbildung¹⁷ 5.

Die analytische Landschaft stellt den Betrag einer komplexen Funktion dar, die Phase wird ignoriert.

4 Phasenplot

4.1 Was ist ein Phasenplot?

Ein anderer Ansatz zum Darstellen einer komplexen Funktion ist das Phasenplot. Im Gegensatz zur analytischen Landschaft stellt das Phasenplot die Phase der jeweiligen Funktionswerte dar und vernachlässigt deren Betrag.

¹²Analog zur Benennung im Reellen.

¹³Aufteilung vgl. Dittmann, Helmut: komplexe Zahlen. Ein Lehr- und Arbeitsbuch, München 1977, S.54 f.

¹⁴oder umgekehrt, da $(g \circ h)(z) = a(z + b) = az + ab \neq (h \circ g)(z)$ zwar andere Werte liefert, f aber auch in anderer Reihenfolge aufgeteilt werden kann.

¹⁵Vgl. Dittmann, Helmut: komplexe Zahlen. Ein Lehr- und Arbeitsbuch, München 1977, S.55

¹⁶Die z -Achse hat nichts mit der Variable z zu tun, $z(z_0 \in \mathbb{C})$ soll einfach die Höhe bei z_0 sein.

¹⁷Abbildung aus: Wegert, Elias: Crashkurs Funktionentheorie, S.24, auf <http://www.mathe.tu-freiberg.de/~wegert/Lehre/RWA/FkthCrash1.pdf>

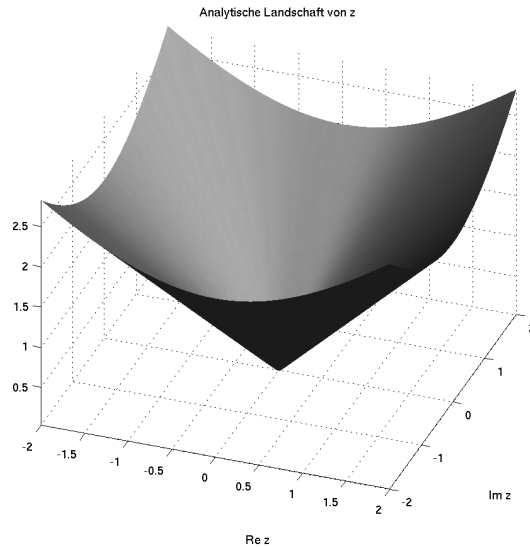


Abbildung 5: Die analytische Landschaft von $f(z) = z$

Ein weiterer Unterschied besteht darin, dass das Phasenplot keine z -Achse benutzt, sondern jedem Punkt der Bildebene eine Farbe zuordnet, die von der Phase des Funktionswertes an dem jeweiligen Punkt abhängt.

Außerdem gibt es zwei Wege, die Phase *und* den Betrag in einem Diagramm zu zeigen. Zum einen die gefärbte analytische Landschaft, zum anderen “domain coloring”. Bei der gefärbten analytischen Landschaft wird der 3-dimensionale Graph, der den Betrag zeigt, abhängig von der Phase eingefärbt. “domain coloring” ist wie das Phasenplot 2-dimensional, enthält aber durch die Helligkeit an einem Punkt Informationen über den Betrag des Funktionswertes. Diese Darstellungen werde ich aber nicht weiter behandeln.



Abbildung 6: Farbkreis, um die komplexe Ebene einzufärben

Um jeder Zahl für das Phasenplot eine Farbe zuzuweisen muss, bevor man sich mit Funktionswerten beschäftigt, die komplexe Ebene selbst eingefärbt werden. Da die Farbe von der Phase der Zahlen abhängt, sind die Farben auf im Ursprung beginnenden Strahlen konstant. Es genügt also, die Peripherie des komplexen Einheitskreises zu färben, die Farben für alle anderen Zahlen ergeben sich dann daraus. Dafür verwendet man einen Farbkreis, wie in Abbildung¹⁸ 6 zu sehen ist.¹⁹

Zur Darstellung einer Funktion f wird nun jedem Punkt z ihres Definitionsbereichs diejenige Farbe zugeordnet, die der Funktionswert $f(z)$ besitzt. Die vorgegebene Farbkodierung des Wertebereichs wird also durch die Funktion auf das Definitionsgebiet zurück übertragen.

Das Phasenplot kann als Fingerabdruck der Funktion betrachtet werden. Obwohl es nur einen Teil der Daten kodiert (das Argument) und andere Informationen unterdrückt (den Betrag), können Funktionen einer wichtigen Klasse (“analytische” und allgemeiner “meromorphe” Funktionen) im Wesentlichen eindeutig rekonstruiert werden.²⁰

¹⁸Abbildung aus: Wegert, Elias: Phase Plots of Complex Functions: a Journey in Illustration, S.3, auf <http://arxiv.org/PS.cache/arxiv/pdf/1007/1007.2295v1.pdf>, 14.07.2010

¹⁹Genauerer werde ich dazu nicht erläutern, da ich es uninteressant finde, wie man den Einheitskreis einfärbt und es zu weit vom Thema abweicht.

²⁰Entnommen aus: Lorz, Udo: Phasenplots, auf <http://www.mathe.tu-freiberg.de/studierende/phasenplots>, 01.12.2010

4.2 Die identische Abbildung $f(z) = z$

Die identische Abbildung $f(z) = z$ bildet jeden Punkt auf sich selbst ab, das anfangs zugewiesene Farbschema bleibt also einfach erhalten. Man sieht, dass bei der Nullstelle $z = 0$ alle Farben zusammenlaufen.



Abbildung 7: Das Phasenplot von $f(z) = z$

4.3 Polynome - ganzrationale Funktionen

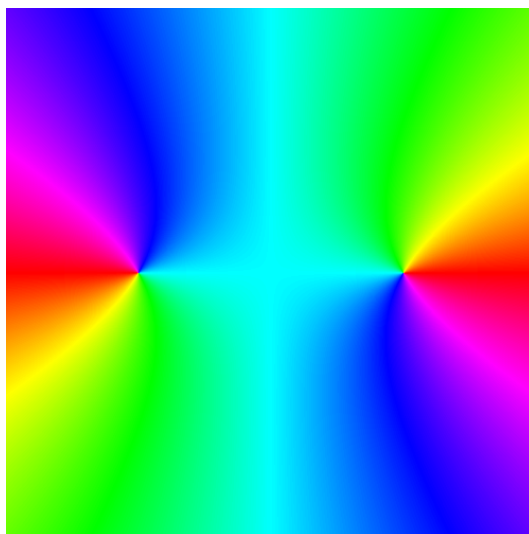


Abbildung 8: Das Phasenplot von $f(z) = (z-1)(z+1)$

Eine ganzrationale Funktion hat die Form

$$f(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_1 z + a_0 \quad \text{mit } a_n \dots a_0 \in \mathbb{C}.$$

Als erstes ist es sinnvoll, einzelne Potenzen zu betrachten, also Funktionen

$$f(z) = z^n \quad \text{mit } n \in \mathbb{N}.$$

Bei dieser Sorte von Funktionen betrachtet man am besten das Bild von einem Kreis K um den Ursprung der Zahlenebene. Durchläuft der Punkt z diesen Kreis einmal, macht $f(z)$ schon n Umdrehungen, da $z^n = |z|^n E(n\varphi)$. Dreht man den Punkt z_1 auf K um den Winkel α weiter, ist der Winkel

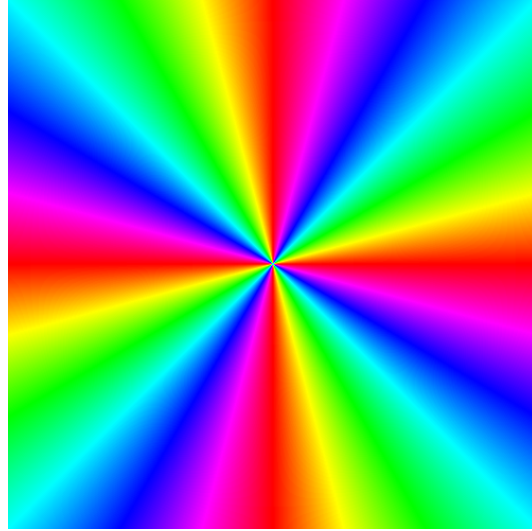


Abbildung 9: Das Phasenplot von $f(z) = z^4$

zwischen $z_1 = |z_1|E(\varphi)$ und $z_2 = |z_1|E(\varphi + \alpha)$ einfach α . Macht man selbiges mit dem Bildpunkt $f(z_1) = |z_1|^n E(n\varphi)$, ist der Winkel $n \cdot \alpha$, da

$$f(z_2) = |z_1|^n E(n(\varphi + \alpha)) = |z_1|^n E(n\varphi + n\alpha) .$$

Der Kreis wird mit der n -fachen Geschwindigkeit umlaufen.

Damit wird jede Farbe genau n -mal überschritten, wenn man einen Punkt im Phasenplot auf einem Kreis um dem Ursprung laufen lässt, zu sehen für $n = 4$ in Abbildung 9. Eine Funktion $f(z) = a_n z^n$ Enthält also n -mal alle Farben in der “normalen” Reihenfolge und ist dann noch um $\arg(a_n)$ gedreht.

Zum Aussehen der ganzrationalen Funktionen folgt mehr in Abschnitt 4.5. Als Beispiel sieht man das Phasenplot von $f(z) = (z - 1)(z + 1)$ in Abbildung 8.

4.4 Gebrochen-rationale Funktionen

Gebrochen-rationale Funktionen sind Quotienten aus zwei Polynomen, haben also die Form

$$f(z) = \frac{a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_1 z + a_0}{b_m z^m + b_{m-1} z^{m-1} + \dots + b_1 z + b_0} \quad \text{mit } a_n \dots a_0, b_m \dots b_0 \in \mathbb{C}, n, m \in \mathbb{N} .$$

Da nach dem Fundamentalsatz der Algebra jedes Polynom in $\mathbb{C}$ in Linearfaktoren zerfällt, kann man eine gebrochen-rationale Funktion als

$$f(z) = a (z - z_0)^{n_0} (z - z_1)^{n_1} \dots (z - z_m)^{n_m} \quad \text{mit } a, z_0 \dots z_m \in \mathbb{C}, n_0 \dots n_m \in \mathbb{Z}$$

darstellen. Eine gebrochen-rationale Funktion ist also das Produkt von Funktionen $f_n(z) = (z - z_n)^m$ mit einer *ganzen* Zahl m und einem Vorfaktor.

Auch hier bietet es sich an, zuerst Funktionen $f(z) = z^m$ für negative m zu betrachten. Analog zu den Überlegungen aus Abschnitt 4.3 stellt man dabei fest, dass sich der Bildpunkt wieder mit $|m|$ -facher Geschwindigkeit bewegt, aber diesmal in entgegengesetzter Richtung.

Die Funktion $f(z) = z^m$ mit $m \in \mathbb{Z}^-$ sieht also bei $z = 0$ so aus wie $h(z) = z^n$ mit $n = -m$, nur sind die Farben in umgekehrter Reihenfolge angeordnet.

Wie eine gebrochen-rationale Funktion im Ganzen aussieht, wird im nächsten Abschnitt behandelt.

4.5 Nullstellen und Polstellen

Was das Phasenplot so nützlich macht, ist, dass man Eigenschaften der zugrunde liegenden Funktion erkennen kann.

Eine ganzrationale Funktion, die an der Stelle z_0 eine n -fache Nullstelle hat, kann als

$$f(z) = (z - z_0)^n g(z)$$

dargestellt werden, wobei $g(z)$ wieder ein Polynom und $g(z_0)$ nicht Nullstelle ist.

Hat die Funktion f eine Nullstelle n -ten Grades bei z_0 , dann sieht sie nahe z_0 also so aus, wie z^n bei 0, gedreht um $\arg(g(z_0))$ ²¹. Das eine ganzrationale Funktion im kleinen eine Drehstreckung macht, ergibt sich daraus, dass sie differenzierbar ist, also der Grenzwert

$$g'(z) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(z+h) - g(z)}{h}$$

existiert. Dann gilt nämlich Folgendes

$$\begin{aligned} g'(z) &\approx \frac{g(z+h) - g(z)}{h} \quad \text{für kleine } h \\ g(z+h) &\approx g(z) + g'(z) h. \end{aligned}$$

In Worten heißt das so viel wie: entfernt man sich um ein kleines h von z , entfernt sich der Bildpunkt davon um $g'(z) h$ vom Bildpunkt von z , also um h mit $g'(z)$ drehgestreckt. Weil $g'(z)$ aber konstant ist, bedeutet dies, dass eine komplex differenzierbare Funktion im kleinen eine Drehstreckung macht²².

Bei gebrochen-rationalen Funktionen ergeben sich ähnliche Betrachtungen. Hat eine gebrochen-rationale Funktion f bei z_0 eine n -fache Nullstelle²³, kann man im Funktionsterm ein $(z - z_0)^n$ ausklammern. Der Rest $g(z)$ darf dann bei z_0 weder eine Null- noch eine Polstelle haben²⁴.

Man kann also sagen, dass man am Phasenplot einer gebrochen-rationalen Funktion²⁵ erkennen kann, wo Polstellen bzw. Nullstellen vorliegen und man erkennt deren Vielfachheit, ein Beispiel für $f(z) = \frac{z-i}{z^2-1}$ ist in Abbildung 10 zu sehen.

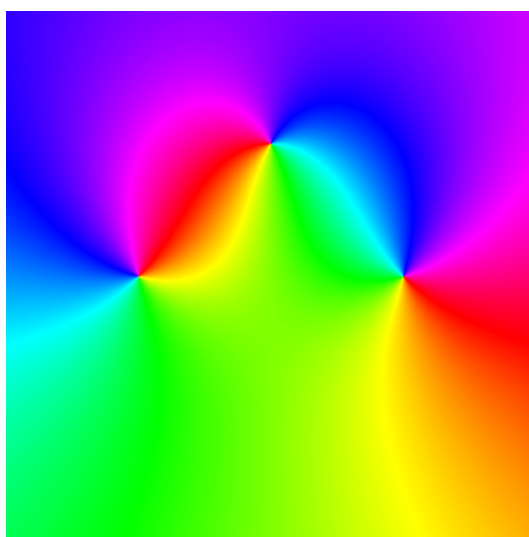


Abbildung 10: Das Phasenplot von $f(z) = \frac{z-i}{z^2-1}$

5 Fazit

Da ich mich mit den Grundlagen der komplexen Zahlen und einem sehr kleinen Teil der Funktionentheorie beschäftigt habe, kann ich leider nicht beurteilen, wie weit der Nutzen der Zahlbereichserweiterung auf $\mathbb{C}$ allgemein reicht. Die wichtigen Erkenntnisse dieser Theorie liegen wahrscheinlich außerhalb meiner Reichweite.

Im Grunde hat diese ansatzweise Betrachtung von komplexen Zahlen und komplexen Funktionen mir gezeigt, dass das Rechnen mit komplexen Zahlen relativ einfach und leicht verständlich ist. Funktionen im Komplexen sind so aufgebaut, wie man es bereits von reellen Funktionen gewöhnt ist. Ein Problem, das sich ergibt ist die Darstellung der vier Dimensionen, die man für den Real- und Imaginärteil der Variablen und der Funktionswerte benötigt.

²¹Vgl. Wegert, Elias: Phase Plots of Complex Functions: a Journey in Illustration, S.5 f. , auf http://arxiv.org/PS_cache/arxiv/pdf/1007/1007.2295v1.pdf, 14.07.2010

²²Abgesehen von Nullstellen, da ändern sich einige der benutzten Beziehungen.

²³Aus Gründen der Einfachheit betrachte ich eine n -fache Polstelle als $(-n)$ -fache Nullstelle.

²⁴Sonst könnte man beliebige Linearfaktoren ausklammern, die dann einfach wieder reziprok im Rest auftauchen.

²⁵Ganzrationale Funktionen sind als Sonderfall eingeschlossen, nämlich wenn des Polynom im Nenner gleich 1 ist.

Phasenplots als Lösung dieses Problems geben oft wesentliche Informationen über die zugrundeliegende Funktion und sind optisch auch sehr ansprechend.

6 Literatur

Verfasserschriften (Fachbücher)

Dittmann, Helmut: komplexe Zahlen. Ein Lehr- und Arbeitsbuch, München 1977

Pieper, Herbert: Die komplexen Zahlen. Theorie Praxis Geschichte, Berlin 1984

Internetquellen

Gühr, Marcel: Komplexe Zahlen, *auf* [http://www.mguehr.ch/Skript Komplexe Zahlen.pdf](http://www.mguehr.ch/Skript%20Komplexe%20Zahlen.pdf), 2008

Lorz, Udo: Phasenplots, *auf* <http://www.mathe.tu-freiberg.de/studierende/phasenplots>, 01.12.2010

Poenitz, Arne: Die komplexe Zahlenebene,
auf [http://www.poenitz-net.de/Mathematik/8.Komplexe Zahlen/8.4.S.Zahlenebene.pdf](http://www.poenitz-net.de/Mathematik/8.Komplexe%20Zahlen/8.4.S.Zahlenebene.pdf), o.J.

Wegert, Elias: Crashkurs Funktionentheorie,
auf <http://www.mathe.tu-freiberg.de/~wegert/Lehre/RWA/FkthCrash1.pdf>, o.J.

Wegert, Elias: Phase Plots of Complex Functions: a Journey in Illustration,
auf [http://arxiv.org/PS cache/arxiv/pdf/1007/1007.2295v1.pdf](http://arxiv.org/PS_cache/arxiv/pdf/1007/1007.2295v1.pdf), 14.07.2010

7 Erklärung über selbständiges Anfertigen

Hiermit versichere ich, dass ich die Facharbeit selbstständig verfasst habe, dass keine anderen Quellen und Hilfsmittel als die angegebenen benutzt und die Stellen der Arbeit, die anderen Werken dem Wortlaut oder Sinn nach entnommen sind, in jedem Fall unter Angabe der Quelle als Entlehnung kenntlich gemacht worden sind.

Ort, Datum

Unterschrift