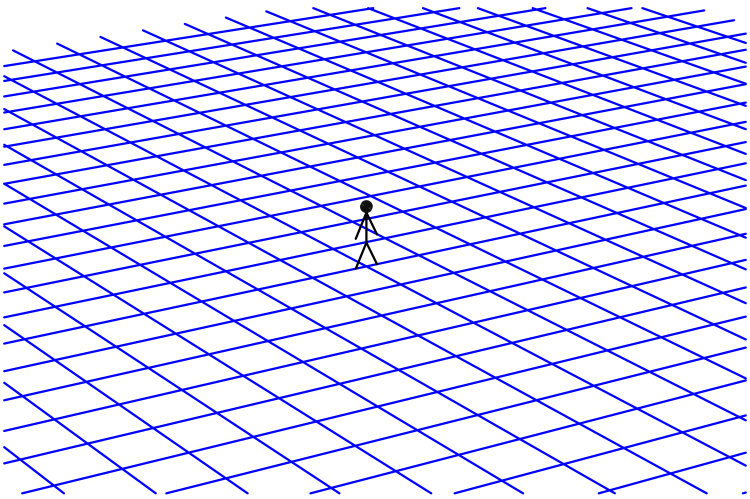
Untersuchungen an Gittern

Phillip Durczok, Sebastian Horstmann, B. Waldmüller

16. Juli 2011



Skript zum Mathematischen Samstag am Söderblom–Gymnasium
am 16. Juli 2011

Inhaltsverzeichnis

1 Was ist ein Gitter?

1.1 Beispiele für Gitter und ihre Eigenschaften

Ein Beispiel für ein Gitter, mit dem du wohl vertraut bist, konstruiert man auf die folgende Weise. Nimm das Einheitsquadrat in der xy–Ebene, also das Quadrat mit den Eckpunkten $(0, 0)$, $(1, 0)$, $(1, 1)$ und $(0, 1)$, und verschiebe es um $1, 2, 3, \ldots$ Einheiten in x–Richtung und um $1, 2, 3, \ldots$ Einheiten in die entgegengesetzte Richtung. Verschiebe dann den ganzen Streifen von Quadraten, den du erhalten hast, um $1, 2, 3, \ldots$ Einheiten in y–Richtung und um $1, 2, 3, \ldots$ Einheiten in die entgegengesetzte Richtung. Dann ist die ganze Ebene mit Quadraten überdeckt. Das Gitter G ist die Menge der Eckpunkte all dieser Quadrate:

$$G = \{\, (x, y) \,|\, x, y \in \mathbb{Z} \,\} \quad ,$$

es besteht also genau aus den Punkten der Ebene mit ganzzahligen Koordinaten.

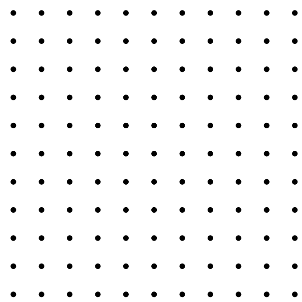


Abbildung 1: Ebenes quadratisches Gitter

Das Quadrat, mit dem wir begonnen haben, heißt eine **Elementarzelle** des Gitters. Die oben beschriebene Konstruktion können wir mit beliebigen Parallelogrammen anstelle des Quadrates durchführen; wir wollen hier aber verlangen, dass Elementarzellen stets den Inhalt 1 haben; das Gitter nennt man dann **Einheitsgitter**. Abbildung 2 zeigt einige Elementarzellen, die zur Erzeugung des Gitters aus Abbildung 1 geeignet sind. Man kann also das gleiche Gitter mit verschiedenen Elementarzellen erzeugen, allerdings haben Elementarzellen des gleichen Gitters stets denselben Inhalt.

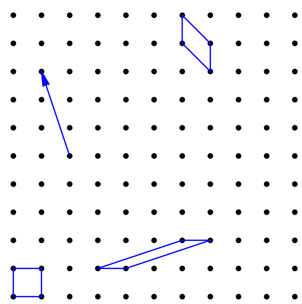


Abbildung 2: Ebenes quadratisches Gitter mit Elementarzellen und Gittervektor

Schauen wir uns ein weiteres Beispiel an. Als Elementarzelle verwenden wir einen Rhombus, der aus zwei gleichseitigen Dreiecken besteht. Die oben beschriebene Konstruktion führt dann zu dem Gitter in Abbildung 3.

Ich nenne zwei charakteristische Eigenschaften von Gittern:

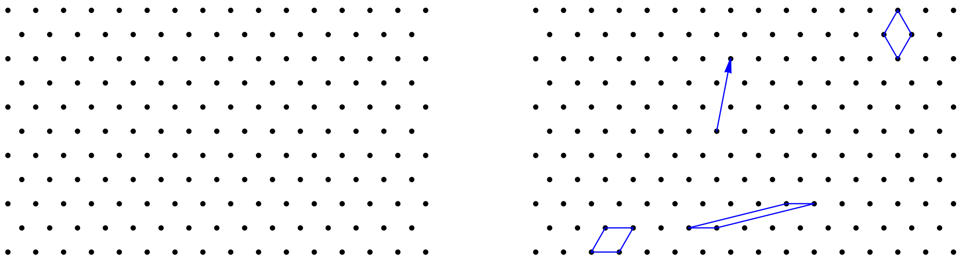


Abbildung 3: Gitter mit Rhombus als Elementarzelle

1. Eine Verschiebung der Ebene, die einen Gitterpunkt P in einen Gitterpunkt Q abbildet, überführt das ganze Gitter in sich. Eine solche Verschiebung bezeichnen wir mit dem Symbol $\overrightarrow{PQ}$. Für die Verschiebung, die den Nullpunkt O in den Punkt P überführt, schreiben wir dann einfach $\vec{p}$:

$$\vec{p} := \overrightarrow{OP}$$

Dir ist dieses Symbol vielleicht unter dem Namen Ortsvektor des Punktes P begegnet, das läuft aber auf das Gleiche hinaus.

2. Wendet man auf eine Elementarzelle sämtliche Verschiebungen $\overrightarrow{PQ}$ an, wobei P ein fester Gitterpunkt ist und Q alle Gitterpunkte durchläuft, überdeckt man die ganze Ebene, und nur für Randpunkte X, Y der Elementarzelle können die Bilder unter verschiedenen Verschiebungen zusammenfallen:

$$X, Y \text{ innere Punkte der Elementarzelle, } P, Q \text{ verschiedene Gitterpunkte}$$
$$\Rightarrow \vec{x} + \overrightarrow{OP} \neq \vec{y} + \overrightarrow{OQ}$$

1.2 Allgemeine Gitter

Gitter gibt es in Räumen beliebiger Dimension. Gezeigt habe ich dir Beispiele für ebene Gitter, weil der Begriff dort besonders gut zu verstehen ist. Die Dimension der Ebene ist 2. Die oben beschriebene Konstruktion funktioniert für beliebige Dimension, und die Gitter haben auch alle die genannten Eigenschaften.

Aufgaben

1. Wie sehen Gitter der Dimensionen 1 und 3 aus?

2. Finde ein ebenes Einheitsgitter, das nicht das Quadratgitter aus Abbildung 1 ist.

3. Wie groß ist die kürzeste Entfernung zweier Punkte eines ebenen Einheitsgitters höchstens?

Eine auch nur halbwegs systematische Untersuchung auch nur ebener Gitter wäre schon ein recht umfangreiches Projekt, das gehen wir heute nicht an. Mein Ziel ist, euch mit Hilfe des Gitterbegriffs interessante Phänomene zu zeigen.

2 Der Minkowskische Gitterpunktsatz

2.1 Vorbereitungen

Es sei G das ebene Gitter aus der Abbildung 1, und es sei X ein ebenes Flächenstück, das nur den Gitterpunkt $O(0,0)$ enthält. Wie groß kann X dann sein?

Wenn man an X keinerlei Anforderungen stellt, kann der Inhalt von X unendlich groß sein: Man kann ja zum Beispiel die ganze Ebene nehmen und eine beliebig kleine Kreisscheibe um jeden Gitterpunkt außer O herausstanzen. Wir erhöhen die Anforderungen, die X erfüllen soll.

Aufgabe. Kann X immer noch einen unendlich großen Flächeninhalt haben, wenn X

1. konvex ist, das heißt, dass für alle Paare P, Q von Punkten in X auch gleich die ganze Verbindungsstrecke $\overline{PQ}$ in X liegen soll;
2. zusätzlich punktsymmetrisch zu O sein soll?

2.2 Die Beweisidee des Satzes

Schauen wir uns eine konvexe ebene Punktmenge X an, die den Punkt $O(0,0)$ des quadratischen Einheitsgitters G enthält und die punktsymmetrisch zu O ist. Die Abbildung 4 zeigt ein einfaches Beispiel.

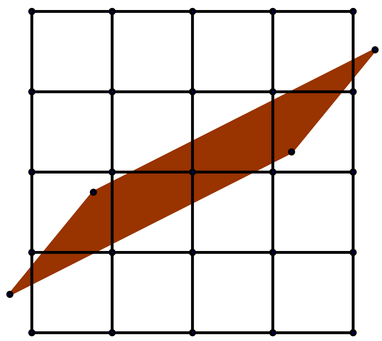


Abbildung 4: Ein ebenes, konvexes und zu $O(0,0)$ punktsymmetrisches X

Wir bilden X durch die zentrische Streckung an O mit dem Streckfaktor $k = \frac{1}{2}$ ab. Die Bildmenge X' hat nun nur noch ein Viertel des Inhalts von X.

Wir repräsentieren jedes Gitterquadrat durch seine linke untere Ecke – das Einheitsquadrat wird dann durch $O(0,0)$ vertreten. Außer in diesem Quadrat liegen Teile unserer Punktmenge X' auch in den Quadraten zu $(1,0)$, zu $(-1,0)$, zu $(-1,-1)$ und zu $(-2,-1)$ und einigen weiteren. Nun verschieben wir das Quadrat zu $(1,0)$ um 1 nach links, das Quadrat zu $(-2,-1)$ um 2 nach rechts und um 1 hoch, allgemein: das Quadrat zu (a,b) um a nach links und um b nach unten. Auf diese Weise bringen wir all diese Quadrate jeweils mit den Teilen von X', die sie enthalten, auf das Einheitsquadrat zu $(0,0)$. Die Abbildung 6 zeigt das Ergebnis und den Umriss von X'.

Falls sich die verschobenen Teile von X' nicht überlappen, kann der Inhalt von X' höchstens so groß sein wie der des Einheitsquadrats, also höchstens 1. Dann kann der Inhalt von X höchstens $= 4$ gewesen sein. War der Inhalt von X größer als 4, muss es mindestens einen Punkt P geben, der im Inneren von zweien der

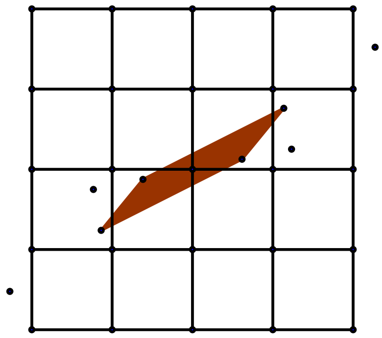


Abbildung 5: Das Bild X' von X unter Streckung an O mit $k = \frac{1}{2}$

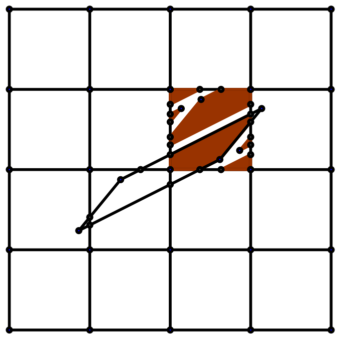


Abbildung 6: Alle Teile von X' in das Einheitsquadrat verschoben

verschobenen Teilstücke liegt. Dieser Punkt entstand also sowohl aus einem Punkt P_1' von X' durch Verschiebung um einen Gittervektor $\vec{v}_1$ als auch aus einem Punkt P_2' von X' durch Verschiebung um einen Gittervektor v_2. Es folgt – hier benutze ich jetzt der Einfachheit halber wieder Vektorschreibweise –

$$\vec{p}_1{}' + \vec{v}_1 = \vec{p} = \vec{p}_2{}' + \vec{v}_2 \quad ,$$

und daraus ergibt sich

$$\vec{p}_1{}' - \vec{p}_2{}' = \vec{v}_2 - \vec{v}_1 \quad . \tag{1}$$

Auf der rechten Seite der Gleichung steht ein Gittervektor. Der Vektor auf der linken Seite ist der Ortsvektor eines Punktes aus X ! Das sieht man so: Der Punkt P_i' zum Ortsvektor $\vec{p}_i{}'$ liegt in X', folglich liegt der Punkt P_i zum Ortsvektor $\vec{p}_i = 2\vec{p}_i{}'$ in X für $i = 1, 2$. Wegen der Punktsymmetrie liegt dann auch der Punkt Q mit dem Ortsvektor $\vec{q} = -2\vec{p}_2{}'$ in X . Weil X konvex ist, muss auch der Mittelpunkt der Strecke $\overline{P_1Q}$ in X liegen, und der Ortsvektor dieses Punktes ist

$$\frac{1}{2}(2\vec{p}_1{}' - 2\vec{p}_2{}') = \vec{p}_1{}' - \vec{p}_2{}' \quad ,$$

also gerade der Vektor auf der linken Seite der Gleichung (1). Damit haben wir einen Gitterpunkt gefunden, der in X liegt. Und dieser Punkt kann nicht der alte Punkt $O \in X$ sein, denn die Stücke von X im Einheitsquadrat, die sich überlappen, stammen von verschiedenen Gitterquadraten; sie wurden also durch verschiedene Verschiebungsvektoren in das Einheitsquadrat gebracht. Deshalb ist $\vec{v}_2 - \vec{v}_1 \neq \vec{0}$.

Damit haben wir für das ebene Gitter aus Einheitsquadraten das Folgende nachgewiesen: Jede ebene konvexe Punktmenge X mit dem Flächeninhalt $|X| > 4$, die einen Gitterpunkt enthält und zu diesem punktsymmetrisch ist, enthält mindestens einen weiteren Gitterpunkt.

2.3 Der Satz

Die im vorigen Unterkapitel konkret vorgetragene Argumentation ist sehr raffiniert, aber sie hängt weder daran, dass sie an einem quadratischen Gitter erklärt wurde, noch an der Dimension 2 des Gitters im Beispiel. Streckt man allerdings einen Körper X in einem Raum der Dimension d mit dem Faktor $\frac{1}{2}$, ist das Volumen des Bildkörpers X' das $\left(\frac{1}{2}\right)^d$–fache des Volumens von X. Die Zahl 4 in unserem Ergebnis ist das Quadrat der Dimension 2 der Ebene, und den Wert müssen wir anpassen, wenn wir die Dimension verändern. Und die Elementarzelle dürfte durchaus einen anderen Inhalt als 1 haben. Das war schon alles, der Rest geht unverändert durch. Es gilt der folgende Satz:

1 Satz (Minkowskischer Gitterpunktsatz)
Es sei X eine konvexe Menge in einem Raum der Dimension d, und X sei punktsymmetrisch zu einem Punkt O eines vollständigen Gitters in dem Raum. Wenn dann das Volumen von X größer ist als das 2^d–fache des Volumens der Elementarzelle des Gitters, muss X noch mindestens einen weiteren Gitterpunkt enthalten.

Der Satz garantiert nur die Existenz eines weiteren Gitterpunktes in X, er sagt aber nicht, wie man ihn findet.

Aufgaben

1. Begründe, dass die Voraussetzungen des Satzes erzwingen, dass der Punkt O in X liegt.

2. Das Zentrum einer Raute liege im Punkt O der Ebene. Wähle die Längen der Diagonalen der Raute so, dass der Inhalt der Raute größer als 4 ist. Nach dem Gitterpunktsatz enthält die Raute noch mindestens einen weiteren Punkt des quadratischen Einheitsgitters, auch wenn die Raute sehr extreme Abmessungen hat, also wenn eine Diagonale die Länge 10000 hat. Überlege dir eine Strategie, wie man Gitterpunkte in der Raute findet.

3. Geht eigentlich jede Gerade durch den Nullpunkt O der Ebene durch einen weiteren Punkt des quadratischen Einheitsgitters? Du kannst die Frage auch so stellen: Der Zufallswanderer auf dem Gitter, der uns noch beschäftigen wird, steht im Punkt O und schaut um sich. Auf jedem Gitterpunkt stehe ein mannshoher Stab mit dem Durchmesser 0. Gibt es dann Richtungen, in denen er zwischen den unendlich vielen Stäben hindurchsehen kann?

4. Die lange Diagonale der Raute aus Aufgabe 2 liege auf der Geraden durch den Nullpunkt und den Punkt $(1, \sqrt{2})$. Kannst du für jede Diagonalenlänge e einen Gitterpunkt $\neq O$ angeben, der in der Raute liegt?

Schauen wir kurz zurück: recht elementare Überlegungen an Figuren auf Kästchenpapier führten zu einem großen Satz, der in Räumen beliebiger Dimension gilt. Am Berliner Konrad-Zuse-Institut wird neben anderen Dingen ganzzahlige Optimierung betrieben, Anwendungsprobleme führen dort auf Funktionen mit N Variablen. Du kennst $f(x)$ als Symbol für den Wert des Argumentes x unter der Funktion f. Jedem x entspricht bei den Zuse–Leuten ein Satz von N ganzen Zahlen, und die kann man als Koordinaten eines Gitterpunktes in einem Raum ansehen, dessen Dimension die Anzahl der Variablen ist. Ziel ist, Gitterpunkte in einem vorgegebenen Bereich zu finden, deren $f(x)$ möglichst klein ist, und ich stelle mir vor, dass dabei Minkowskis Satz oder Werkzeuge, in denen der Satz steckt, täglich angewandt werden. Wir sehen uns einen kurzen Film dazu an!

Wer eine elementare Anwendung des Satzes sehen will, schaue in das schöne Buch „Anschauliche Geometrie“. Es gibt den Inhalt einer Vorlesung wieder, die der große David Hilbert 1920 in Göttingen gehalten hat, um die Leistungsfähigkeit und die Schönheit der Geometrie für ein recht breites Publikum erfahrbar zu machen. Es lohnt sich sehr, hineinzuschauen.

3 Ein Zufallswanderer auf einem Gitter

3.1 Problemstellung

Ein Wanderer beginnt seine Wanderung im Nullpunkt eines Gitters. In jedem Gitterpunkt, in dem er sich gerade befindet, wählt er zufällig eine der Kanten, die in seinem Gitterpunkt enden, und läuft darauf zum nächsten Gitterpunkt.

Sebastian Horstmann hat eine MuPAD–Datei[1] erstellt, die schön vor Augen führt, wie so eine Wanderung auf einem ebenen Gitter abläuft.

Aufgaben

1. Der Wanderer laufe auf einem zweidimensionalen Gitter. An welchen Punkten kann er $1, 2$ und 3 Schritte nach dem Start sein? Gib auch für jeden Punkt die Wahrscheinlichkeit an, mit der man ihn an diesem Punkt findet.

2. Der Wanderer laufe auf einem eindimensionalen Gitter. Mit welcher Wahrscheinlichkeit befindet er sich nach n Schritten im Punkt V_k für $k \in \mathbb{N}$?

Es erhebt sich sofort die Frage: **Wird der Wanderer wieder zum Ausgangspunkt zurückkommen, und wie lange wird das dauern?** Diesen Fragen wollen wir im Folgenden nachgehen.

[1] Die Datei heißt 2dUnendlich.mn .

3.2 Antworten für endliche Ausschnitte des Gitters (1)

Wir betrachten einen endlichen Ausschnitt eines Gitters, konkret einen rechteckigen Ausschnitt aus einem ebenen Gitter, wie in Abbildung 7 gezeigt. Der Wanderer startet dann zum Beispiel in dem Punkt im Zentrum, und er kann den Ausschnitt nicht verlassen.

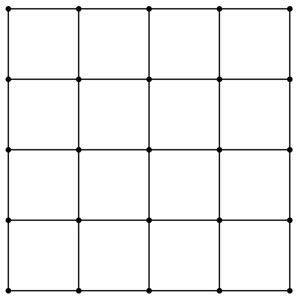


Abbildung 7: Endlicher Ausschnitt aus einem ebenen Gitter

3.2.1 Er findet immer zurück

Wir überlegen uns die Sache an dem Ausschnitt aus einem ebenen Gitter, der in Abbildung 7 gezeigt ist. Der Wanderer befinde sich in einem beliebigen Punkt V des Ausschnitts, und wir fragen danach, ob er wohl im Laufe seiner Wanderung den Punkt V_0 unten links besuchen wird.

Es gibt einen Weg von V zu V_0, der höchstens acht Kanten lang ist. Jede Kante des Graphen hat mindestens die Wahrscheinlichkeit $p = \frac{1}{4}$, dass gerade sie gewählt wird, wenn sich der Wanderer an einem ihrer Endpunkte aufhält. Demnach ist die Wahrscheinlichkeit

$$q := P(\text{ W. hat } V_0 \text{ nach höchstens 8 Schritten erreicht }) \geq \left(\frac{1}{4}\right)^8 > 0 \quad ,$$

und somit

$$P(\text{ W. hat } V_0 \text{ nach 8 Schritten noch nicht erreicht }) \leq 1 - q < 1 \quad .$$

Für die Wahrscheinlichkeit, dass der Wanderer V_0 nach $8n$ Schritten immer noch nicht erreicht, gilt dann

$$P(\text{ W. hat } V_0 \text{ nach } 8n \text{ Schritten noch nicht erreicht }) \leq (1-q)^n \quad \xrightarrow{n\to\infty} \quad 0 \quad .$$

Was wir an diesem konkreten Beispiel erkannt haben, gilt offensichtlich recht allgemein; die einzelnen Schlüsse lassen sich Punkt für Punkt übertragen. Wir halten das Ergebnis in einem Satz fest.

2 Satz
Ein Zufallswanderer sei auf einem zusammenhängenden Graphen mit endlich vielen Ecken unterwegs, je zwei Ecken seien durch höchstens eine Kante verbunden und jede Kante werde mit positiver Wahrscheinlichkeit gewählt. Eine jede beliebig gewählte Ecke des Graphen wird dann von dem Wanderer im Laufe seiner Wanderung mit der Wahrscheinlichkeit 1 besucht.

Für unsere konkrete Situation heißt dass: Ist der Wanderer in einem zusammenhängenden Ausschnitt des Gitters mit endlich vielen Gitterpunkten unterwegs, erreicht er jeden Gitterpunkt des Ausschnitts mit der Wahrscheinlichkeit 1. Der Stochastiker sagt dann, der Wanderer erreiche jeden Gitterpunkt des Ausschnitts „fast sicher“. Es lohnt sich, über den Sinn dieser Sprechweise nachzudenken.

3.2.2 Welche von zwei Ecken besucht der Wanderer zuerst?

Ein Zufallswanderer ist in dem Ausschnitt aus einem ebenen Gitter in Abbildung 8 unterwegs. Wir wissen schon, dass er im Laufe seiner Wanderung jeden Gitterpunkt mit der Wahrscheinlichkeit 1 besuchen wird. Mit welcher Wahrscheinlichkeit wird er die Ecke unten rechts **vor** der Ecke unten links aufsuchen?

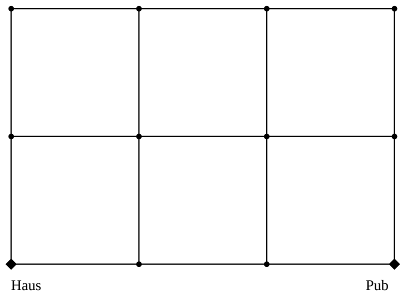


Abbildung 8: Endlicher Ausschnitt aus einem ebenen Gitter

Dieses Beispiel stammt aus dem Buch von Häggström[2]; bei ihm stellt die Ecke unten rechts einen Pub und die Ecke unten links das Haus des Wanderers dar, und Häggström fragt, ob die Reise den Wanderer wohl eher nach Hause oder eher in den Pub führen wird.[3]

Die Antwort auf die Frage hängt sicherlich vom Startpunkt ab. Wir übernehmen die Bezeichnungen von Häggström: Er nummeriert die Ecken zeilenweise von oben links nach unten rechts mit V_1 bis V_{12}, dementsprechend erhält der Pub den Namen V_{12} und das Haus den Namen V_9. Ferner setzt er für jedes k von 1 bis 12

$$p_k := P(\text{ W. besucht } V_{12} \text{ vor } V_9 \mid \text{Start in } V_k\ ) \quad .$$

Dieses p_k ist eine so genannte bedingte Wahrscheinlichkeit: man geht davon aus, dass sich der Wanderer gerade in V_k befindet.

Offensichtlich ist $p_{12} = 1$ und $p_9 = 0$. Für jede der übrigen Ecken können wir eine Gleichung hinschreiben. Beispielsweise gilt für die Ecke V_6 nach der bekannten Pfadregel

$$p_6 = \frac{1}{4}p_2 + \frac{1}{4}p_5 + \frac{1}{4}p_{10} + \frac{1}{4}p_7 = \frac{1}{4}(p_2 + p_5 + p_7 + p_{10}) \quad .$$

Bezeichnen wir die Anzahl der Kanten, die in V_k enden, mit d_k, gilt für $k \neq 9, 12$

$$p_k = \frac{1}{d_k}\left(\sum_{V_j \text{ Nachbar von } V_k} p_j\right) \quad . \tag{2}$$

Diese Gleichung stimmt auch, wenn V_k etwa zu V_{12} benachbart ist, wie das Beispiel $k = 8$ zeigt:

$$p_8 = \frac{1}{3}p_4 + \frac{1}{3}p_7 + \frac{1}{3} = \frac{1}{3}(p_4 + p_7 + 1) = \frac{1}{3}(p_4 + p_7 + p_{12}) \quad .$$

[2]Seite 164ff

[3]Auch zu diesem Prozess hat Sebastian eine Simulation geschrieben, das ist der vierte Teil in 2dBox.mn .

Bildet man für jede der zehn unbekannten Wahrscheinlichkeiten die Gleichung nach dem Muster der Gleichung (2), erhält man ein Lineares Gleichungssystem der Größe 10×10:

$$\begin{aligned}
-2p_1 + p_2 + p_5 &= 0\\
p_1 - 3p_2 + p_3 + p_6 &= 0\\
p_2 - 3p_3 + p_4 + p_7 &= 0\\
p_3 - 2p_4 + p_8 &= 0\\
p_1 - 3p_5 + p_6 + p_9 &= 0\\
p_2 + p_5 - 4p_6 + p_7 + p_{10} &= 0\\
p_3 + p_6 - 4p_7 + p_8 + p_{11} &= 0\\
p_4 + p_7 - 3p_8 + p_{12} &= 0\\
p_6 + p_9 - 3p_{10} + p_{11} &= 0\\
p_7 + p_{10} - 3p_{11} + p_{12} &= 0
\end{aligned}$$

Löst man es mit $p_9 = 0$ und $p_{12} = 1$, findet man die von Häggström angegebene Lösung[4]:

$$p_1 = \frac{92}{267},\ p_2 = \frac{39}{89},\ p_3 = \frac{50}{89},\ p_4 = \frac{175}{267},\ p_5 = \frac{67}{267}$$

$$p_6 = \frac{109}{267},\ p_7 = \frac{158}{267},\ p_8 = \frac{200}{267},\ p_{10} = \frac{94}{267},\ p_{11} = \frac{173}{267}$$

Näherungswerte der Wahrscheinlichkeiten zeigt die Abbildung 9.

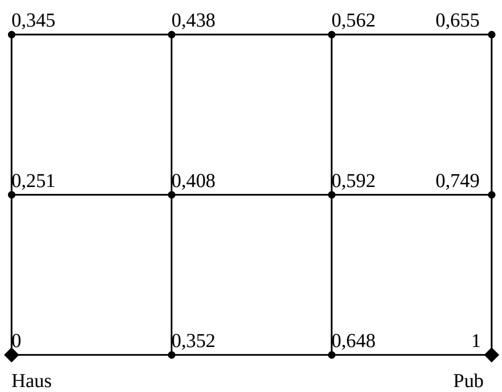


Abbildung 9: Näherungswerte der Wahrscheinlichkeiten p_k

[4]Siehe Häggströms Buch Seite 169. Das Gleichungssystem ist auch in LGS.mn behandelt

3.2.3 Anmerkungen zur Lösbarkeit des LGS

Wir hatten für $k \in \{1, 2, 3, \dots, 12\}$, $k \neq 9, 12$, Gleichungen nach dem Muster der Gleichung (2) gebildet und ein 10×10–LGS erhalten, dabei war $p_9 = 0$ und $p_{12} = 1$ zu setzen. Nehmen wir an, das System habe zwei Lösungen $\vec{c}, \vec{c}\,' \in \mathbb{R}^{10}$. Dann löst der Differenzvektor $\vec{d} = \vec{c} - \vec{c}\,'$ auch das Gleichungssystem, allerdings ist dann $p_9 = p_{12} = 0$ zu setzen.

Es sei nun d_u der kleinste und d_o der größte Eintrag[5] von $\vec{d}$. Nehmen wir an, es wäre $d_o > 0$. Das d_o ist eines der d_k, wir schauen uns die zugehörige Gleichung an. Das d_k ist das arithmetische Mittel der d_j der Kanten, die in V_k enden, und diese d_j sind alle $\leq d_o$. Die Gleichung kann nur erfüllt sein, wenn alle $d_j = d_k = d_o$ sind; wäre auch nur eins echt kleiner als d_o, wäre auch das arithmetische Mittel echt kleiner als d_o. Man kann nun mit den neuen $d_j = d_o$ fortfahren, und so weiter. Aber irgendwann kommt man an eine Gleichung, in der p_9 oder p_{12} vorkommt, und diese sind beide $= 0$, also echt kleiner als $d_k = d_o > 0$, so dass die betreffende Gleichung nicht mehr erfüllt sein kann. Die Annahme $d_o > 0$ führt zu einem Widerspruch, es folgt $d_o \leq 0$.

In gleicher Weise führt die Annahme $d_u < 0$ zu einem Widerspruch, so dass $d_u \geq 0$ folgt. Aus $0 \geq d_o \geq d_u \geq 0$ folgt aber insgesamt $d_u = d_o = 0$. Somit ist $\vec{d} = \vec{0}$. Das homogene LGS aus den zehn Gleichungen nach Gleichung (2) mit $p_9 = p_{12} = 0$ hat nur die triviale Lösung. Also ist das entsprechende inhomogene LGS der zehn Gleichungen für jeden Wertesatz $(p_9; p_{12})$ eindeutig lösbar, insbesondere das vorliegende System mit dem Wertesatz $(0; 1)$ für $(p_9; p_{12})$.

[5] Verwechsle die d_k nicht mit den Kantenanzahlen in der Gleichung (2).

3.3 Reale Modelle: Lineare Zweipole

Abbildung 10 zeigt eine Schaltskizze für ein Gebilde aus Drähten und Widerständen, aus der Physik kenne ich so etwas unter dem Namen „Linearer Zweipol“.

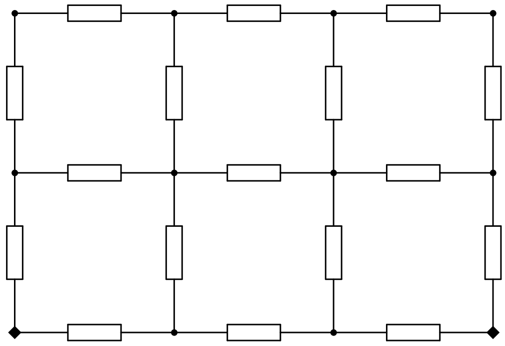


Abbildung 10: Ein Linearer Zweipol

Die Schaltskizze hat große Ähnlichkeit mit dem Ausschnitt aus einem ebenen Gitter in der Abbildung 8 auf der Seite 10, es ist lediglich jede Kante durch einen Widerstand ersetzt; diese Widerstände sollen alle die Größe $R = 1\,\Omega$ haben.

Bei der Schaltung zu dieser Schaltskizze legen wir eine Gleichspannung der Größe 1 Volt an. Der Pluspol kommt an die Ecke V_{12}, der Minuspol an die Ecke V_9. Dann liegt an jedem der Widerstände jeweils eine Spannung U, und durch jeden der Widerstände fließt jeweils ein Strom einer Stärke I, und diese Spannungen und die Stromstärken erfüllen jeweils das bekannte Ohmsche Gesetz

$$U = RI \quad . \tag{3}$$

Dies ist noch jedem vertraut, auch denen, die der Physik eher fernstehen. Ich will nun den Begriff des Potentials vermeiden, um nicht unnötig Leute abzuschrecken, sondern nur berichten, dass es einen Satz $F_1, F_2, \ldots, F_{12}$ von Zahlen gibt, die man so an die Ecken $V_1, V_2, \ldots, V_{12}$ schreiben kann, jeweils F_k an V_k, dass die Spannung zwischen den Ecken V_k und V_j gerade $F_j - F_k$ ist. Insbesondere ist $F_9 = 0$ und $F_{12} = 1$. Phillip Durczok hat das Modell nach der Schaltskizze wirklich gebaut und führt es vor.

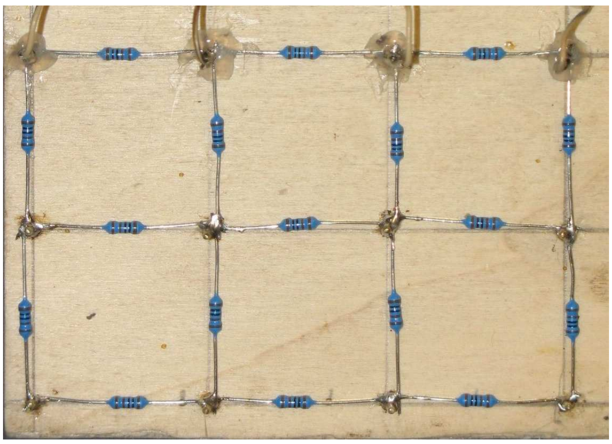


Abbildung 11: Phillips Modell (Foto: Hannes Senf)

Schauen wir uns eine der Ecken V_k für $k \neq 9, 12$ an, zum Beispiel V_6. In V_6 entstehen keine Ladungen und es verschwinden auch keine. Das heißt, dass die Summe der Stromstärken aller Ströme, die in V_6 – genauer, in einen kleinen Kreis um V_6 – hineinfließen, $= 0$ sein muss.[6] Die Stärke des Stroms, der von V_5 nach V_6 fließt, ist nach dem Ohmschen Gesetz

$$I_{56} = \frac{U_{56}}{R} = \frac{F_6 - F_5}{R} = F_6 - F_5 \quad ,$$

die Einheiten lasse ich dabei hier wie im Folgenden außer Acht. Dass die Stromstärken aller Ströme nach V_6 zusammen 0 ergeben müssen, führt zu der Gleichung

$$(F_6 - F_2) + (F_6 - F_5) + (F_6 - F_{10}) + (F_6 - F_7) = 0 \quad ,$$

und die können wir umformen zu

$$F_6 = \frac{1}{4}(F_2 + F_5 + F_{10} + F_7) \quad .$$

Wir erkennen, dass für jedes $k \in \{1, 2, \ldots, 11\}$, $k \neq 9$, die Gleichung

$$F_k = \frac{1}{d_k} \left(\sum_{V_j \text{ Nachbar von } V_k} F_j \right) \tag{4}$$

gilt! Die F_k erfüllen also dasselbe Lineare Gleichungssystem wie die p_k aus Gleichung (2) auf Seite 10, und deshalb muss natürlich $F_k = p_k$ sein für $k = 1, 2, \ldots, 12$.

Phillip wird an seinem Modell die Werte der F_k messen, seine Werte passen sehr gut zu den Zahlen in Abbildung 9 auf Seite 11.

Es passiert immer wieder, dass Gegenstände, die von vornherein nichts mit einander zu tun haben, zu Modellen mit dem gleichen mathematischen Apparat führen. Das ist sehr vorteilhaft: man spart Arbeit, weil man mit dem Apparat gleich Aussagen über verschiedene Gegenstände machen kann, und man gewinnt bisweilen Einsichten über den einen Gegenstand, wenn man Eigenschaften des anderen Gegenstands kennt. Hier wird uns das physikalische Modell helfen, zu Erkenntnissen über die Wanderung unseres Zufallswanderers zu kommen. Keine Sorge, man braucht nicht viel Physik dazu. Man muss eigentlich nur eine Vorstellung davon haben, dass Strom fließende Ladung ist, und wissen, dass ein Widerstand der Größe R, an dem die Spannung U liegt, von einem Strom der Stärke I durchflossen wird und dass diese drei Größen das Ohmsche Gesetz erfüllen – das ist die Gleichung (3).

[6] Man bezeichnet dieses einleuchtende Gesetz als Kirchhoffsche Knotenregel.

3.4 Dimension 1

Unser Wanderer beginnt seine Reise im Punkt V_0 eines eindimensionalen Gitters. Wird er zurückfinden? Nun, den ersten Schritt macht er mit der Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{2}$ nach links zum Punkt V_{-1} und mit der Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{2}$ nach rechts zum Punkt V_1. Wir wollen annehmen, dass er nach rechts geht; aus Symmetriegründen gilt das Ergebnis dann auch für den anderen Fall.

Wenn es eine natürliche Zahl N so gibt, dass der Wanderer V_N nicht nach rechts überschreitet, bleibt er während der ganzen Reise im Bereich $\{V_0, V_1, \dots, V_N\}$, und dann kehrt er nach dem Satz unter der Nummer 2 auf der Seite 9 im Laufe seiner Reise mit der Wahrscheinlichkeit 1 zu V_0 zurück.

Wir müssen also den folgenden Fall betrachten: Der Wanderer startet in V_1, und er erreicht für jede noch so große natürliche Zahl N die Ecke V_N vor der Ecke V_0. Mit welcher Wahrscheinlichkeit q tritt dieser Fall ein?

Um diese Wahrscheinlichkeit q zu bestimmen, betrachten wir den Ausschnitt aus dem Gitter, der von V_0 bis zu V_N reicht, und bilden den Linearen Zweipol dazu, das heißt, wir ersetzen die N Kanten durch Widerstände der Größe $1\,\Omega$ und legen den Minuspol einer Spannungsquelle mit der Spannung $U = 1$ Volt an V_0 und den Pluspol an V_N. Dann haben wir es mit einer simplen Reihenschaltung zu tun: an jedem Widerstand liegt die Spannung $\frac{1}{N}$ Volt, und wir können sofort die Zahlen F_k dazu angeben. Es ist nämlich

$$F_k = \frac{k}{N} \text{ für } k = 0, 1, 2, \dots, N \ .$$

Die Wahrscheinlichkeit, dass der Wanderer V_N bei Start in V_1 vor V_0 erreicht, ist folglich

$$\frac{1}{N} \xrightarrow{N\to\infty} 0 \ .$$

Also ist die Wahrscheinlichkeit, dass der Wanderer niemals zum Startpunkt zurückkehrt, $= 0$. Es gilt der folgende Satz:

3 Satz
Ein Zufallswanderer auf einem eindimensionalen Gitter kehrt mit der Wahrscheinlichkeit 1 zum Ausgangspunkt zurück.

3.5 Lineare Zweipole (2)

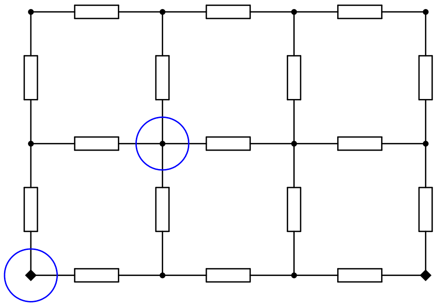


Abbildung 12: Zur Kirchhoffschen Knotenregel (1)

Abbildung 12 zeigt die uns wohlbekannte Schaltskizze eines Linearen Zweipols. Um zwei Ecken ist ein kleiner Kreis gezeichnet. Schauen wir uns zunächst den Kreis um die Ecke V_6 im Inneren an. Vier Leiter führen aus dem Kreis heraus, durch jeden Leiter fließt ein Strom einer gewissen Stärke. Wir werten die Stromstärke als positiv, wenn (negative) Ladung aus dem Kreis nach draußen fließt, und negativ, wenn (negative) Ladung in den Kreis hineinfließt. Dann ist die Summe über alle vier Stromstärken = 0, diese Tatsache haben wir früher schon unter dem Namen Kirchhoffsche Knotenregel benutzt.

Bei dem Kreis um die Ecke V_9 sieht die Sache anders aus, in V_9 war ja der Minuspol der Quelle angeschlossen. Aus V_9 fließt also ständig Ladung in die Anordnung, und diese Ladung verlässt den Kreis um V_9 durch die beiden Leiter in Richtung V_{10} und in Richtung V_5. In Abbildung 13 ist ein anderer „Kreis“ um V_9 gezeichnet. Die Ladungsmenge, die in einer festen Zeiteinheit aus diesem Gebiet nach draußen fließt, muss genau so groß sein wie die Ladungsmenge, die in der gleichen Zeit aus dem kleinen Kreis um V_9 fließt. In Stromstärken ausgedrückt bedeutet das

$$I_{9,5} + I_{9,10} = I_{5,1} + I_{6,2} + I_{7,3} + I_{7,8} + I_{11,12} \quad .$$

Statt des Gebietes in Abbildung 13 könnten wir jedes Gebiet nehmen, das V_9 enthält, aber nicht V_{12}; die Summe der Stärken aller Ströme, die aus dem Gebiet fließen, ergibt immer die gleiche Gesamtstromstärke I. Das Ohmsche Gesetz ergibt für diese Stromstärke I und die angelegte Spannung U die bekannte Gleichung $U = RI$, und das R in dieser Gleichung ist der **Ersatzwiderstand** oder effektive Widerstand R_{eff} des Zweipols (zwischen V_9 und V_{12}).

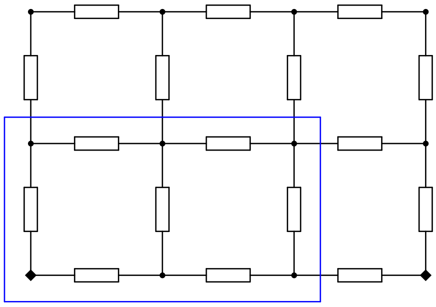


Abbildung 13: Zur Kirchhoffschen Knotenregel (2)

3.6 Antworten für endliche Ausschnitte des Gitters (2)

Wir stellen uns die folgende Aufgabe:

4 Problem
Ein Zufallswanderer startet seine Reise im Punkt V_9 des Ausschnitts aus einem ebenen Gitter, der in Abbildung 8 auf Seite 10 gezeigt ist. Bestimme die Wahrscheinlichkeit q, mit der der Wanderer zum Punkt V_{12} gelangt, bevor er wieder den Startpunkt V_9 erreicht.

Mit Hilfe dessen, was wir bisher erarbeitet haben, können wir die Wahrscheinlichkeit q – Häggström nennt sie übrigens Fluchtwahrscheinlichkeit – relativ leicht angeben. Von V_9 aus gelangt der Wanderer jeweils mit der Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{2}$ zu V_5 oder zu V_{10}. Wir wissen bereits, dass er bei Start in V_5 mit der Wahrscheinlichkeit $p_5 = \frac{67}{267}$ die Ecke V_{12} vor V_9 erreicht; für V_{10} ist der entsprechende Wert $p_{10} = \frac{94}{267}$. Daraus ergibt sich für die Fluchtwahrscheinlichkeit

$$q = \frac{1}{2}p_5 + \frac{1}{2}p_{10} = \frac{161}{534} \quad .$$

So weit, so gut. Wir bringen dieses Resultat mit dem in Verbindung, was im letzten Unterkapitel über Lineare Zweipole ausführt wurde. Beachtet man $R = 1\,\Omega$ und lässt man wieder die Einheiten weg, ergibt sich

$$q = \frac{1}{2}\left(p_5 + p_{10}\right) = \frac{1}{2}\left(F_5 + F_{10}\right) = \frac{1}{2}\left(U_{9,5} + U_{9,10}\right) = \frac{1}{2}\left(I_{9,5} + I_{9,10}\right) = \frac{1}{2}I \quad ,$$

Dabei ist I der Gesamtstrom, der aus V_9 in das System fließt.

Wir formulieren das Ergebnis zum späteren Gebrauch explizit.

5 Bemerkung
Es seien V_a und V_b Ecken eines endlichen zusammenhängenden Ausschnitts eines Gitters. Die Fluchtwahrscheinlichkeit q, dass ein Wanderer bei Start in V_a die Ecke V_b erreicht, bevor er nach V_a zurückkehrt, ist gleich dem Gesamtstrom I, der im zugehörigen Linearen Zweipol aus V_a fließt, wenn man den Minuspol einer Spannungsquelle mit $U = 1$ Volt an V_a und den Pluspol an V_b legt, dividiert durch die Anzahl der Kanten, die in V_a enden:

$$q = \frac{1}{d_a}I = \frac{1}{d_a R_{eff}}$$

3.7 Dimension 2

Unser Wanderer beginnt seine Wanderung im Nullpunkt des ebenen Gitters. Wir fragen nach der Wahrscheinlichkeit, dass er im Laufe seiner Wanderung zum Startpunkt zurückkehrt.

Für $k \in \mathbb{N}$ bezeichnen wir mit G_k den Ausschnitt des Gitters, der die Gitterpunkte enthält, deren Koordinaten betragsmäßig höchstens k sind:

$$G_k := \{\, (x,y) \mid x,y \in \mathbb{Z},\ -k \le x,y \le k\,\} \tag{5}$$

Wir argumentieren nun wie beim eindimensionalen Gitter: Gäbe es ein $k \in \mathbb{N}$ so, dass der Wanderer die ganze Reise in G_k zubrächte, kehrte er nach dem Satz unter der Nummer 2 auf der Seite 9 mit der Wahrscheinlichkeit 1 zum Startpunkt zurück. Dieser Fall ist damit klar. Wir müssen uns mit dem folgenden Ereignis befassen:

A: Für jedes noch so große $k \in \mathbb{N}$ erreicht der Wanderer einen Gitterpunkt (x,y) mit $|x| = k$ oder $|y| = k$, bevor er wieder in (0.0) ist .

Das Ereignis A ist gleichbedeutend damit, dass der Wanderer einen Punkt auf dem Rand von G_k erreicht, bevor er wieder in $(0,0)$ ist.

Wir setzen $V_0 := (0,0)$ und $V_k := (k,0)$. Die Abbildung 14 zeigt G_3 mit den Ecken V_0 und V_3 und den zugehörigen Linearen Zweipol.

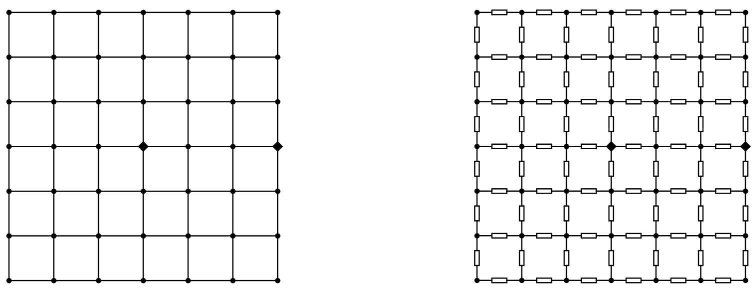


Abbildung 14: Der Ausschnitt G_3 und der zugehörige Lineare Zweipol

Wie wahrscheinlich ist es, dass der Wanderer einen Punkt des Randes von G_3 erreicht, bevor er wieder in V_0 ist? Wir kennen die Fluchtwahrscheinlichkeit q, dass der Wanderer bei Start in V_0 erst V_3 besucht, bevor er wieder in in V_0 ist – was ja mit der Wahrscheinlichkeit 1 irgendwann passieren wird – und zwar ist

$$q = \frac{1}{4} I = \frac{1}{4R_{eff}} \quad .$$

Dabei ist I die Stärke des Stroms, der aus V_0 fließt, wenn man die übliche Quelle in üblicher Weise an V_0 und V_3 anschließt, und R_{eff} der Ersatzwiderstand des Zweipols zwischen V_0 und V_3. Die Stromstärke wird mit Sicherheit nicht kleiner und R_{eff} mit Sicherheit nicht größer, wenn wir einige der Widerstände kurzschließen. Diese Tatsache nutzen wir aus, um den Zweipol einfacher zu machen.

Zunächst überbrücken wir die Widerstände auf dem Rand von G_3 (siehe Abbildung 15). Dadurch liegen alle Ecken auf dem Rand auf dem gleichen Potential 1 von V_3, und die Fluchtwahrscheinlichkeit q', dass der Wanderer einen Punkt des alten Randes erreicht, bevor er wieder in $(0,0)$ ist, ist

$$q' = \frac{1}{4} I' = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{R'_{eff}} = \frac{1}{4R'_{eff}} \quad ,$$

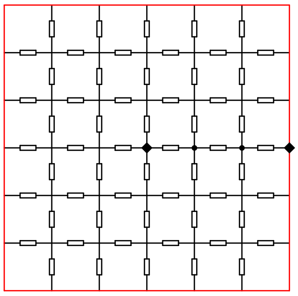


Abbildung 15: Zweipol aus Abbildung 14, Widerstände auf dem Rand kurzgeschlossen

wobei R'_{eff} nun der Ersatzwiderstand des neuen Zweipols zwischen V_0 und V_3 ist und I' der Strom, der aus V_0 in das System fließt..

Nehmen wir nun zusätzlich die Widerstände auf den Rändern von G_1 und G_2 heraus und ersetzen sie durch Leiter! Es ergibt sich der vereinfachte Zweipol in Abbildung 16.

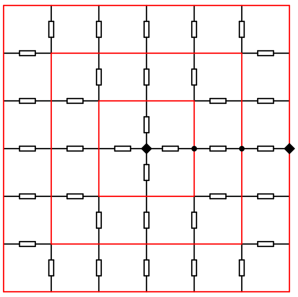


Abbildung 16: Zweipol aus Abbildung 15, Widerstände auf allen Rändern kurzgeschlossen

Dieser letzte Zweipol ist im Prinzip ganz einfach aufgebaut: Es handelt sich um eine Reihenschaltung von Widerständen zwischen Knoten V_0 und V_3.

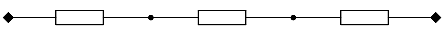


Abbildung 17: Zweipol aus Abbildung 16, vereinfacht

Wir wollen den Ersatzwiderstand R''_{eff} allgemein für eine Reihenschaltung der Länge k wie in Abbildung 17 berechnen. Zwischen V_0 und V_1 liegen vier parallel geschaltete Widerstände der Größe $1\,\Omega$, zwischen V_1 und V_2 zwölf solcher Widerstände, und so weiter. Bei jedem neuen Rand kommen acht Widerstände neu hinzu, nämlich die, die von den vier Ecken des Quadrats ausgehen, das der letzte Rand bildet. Folglich liegen allgemein zwischen V_{j-1} und V_j genau $8j-4$ parallel geschaltete Widerstände zu je $1\,\Omega$. Ihr Ersatzwiderstand ist

$$\frac{1}{8j-4} \quad .$$

Folglich ist der Ersatzwiderstand R''_{eff} der Reihenschaltung in Abbildung 17 und damit auch des Zweipols zu G_k wie in Abbildung 16 gegeben durch

$$R''_{eff} = \frac{1}{8\cdot 1-4} + \frac{1}{8\cdot 2-4} + \cdots + \frac{1}{8\cdot k-4} = \sum_{j=1}^{k} \frac{1}{8j-4} \quad . \tag{6}$$

Schauen wir uns die Reihe auf der rechten Seite der Gleichung etwas genauer an. Es gilt

$$\sum_{j=1}^{k} \frac{1}{8j-4} > \sum_{j=1}^{k} \frac{1}{8j} = \frac{1}{8} \cdot \sum_{j=1}^{k} \frac{1}{j} \xrightarrow{k\to\infty} \infty \quad ,$$

darin steckt nämlich Leibnizens berühmte harmonische Reihe.

Nun müssen wir den Sack nur noch zubinden. Die Abbildung 16 zeigt einen Zweipol für $k=3$. Dazu gehört ein Graph. Wir lassen den Wanderer im zentralen Punkt V_0 des Graphen starten und fragen nach der Wahrscheinlichkeit q''_k, dass er den Randpunkt V_k des Graphen besucht, bevor er wieder in V_0 ist. Wir können q''_k mit Hilfe von R''_{eff} berechnen und erhalten

$$q''_k = \frac{1}{4 \cdot \sum_{j=1}^{k} \frac{1}{8j-4}} \xrightarrow{k\to\infty} 0 \quad . \tag{7}$$

Die Wahrscheinlichkeit q'_k, dass ein Wanderer, der im zentralen Punkt V_0 des Graphen G_k startet, einen Punkt auf dem Rand von G_k erreicht, bevor er wieder in V_0 ist, ist aber nach Konstruktion höchstens so groß wie q''_k; sie strebt also ebenfalls gegen 0 für $k \to \infty$. Damit ist die Wahrscheinlichkeit $P(A)$ der Aussage A am Anfang des Unterkapitels $= 0$, der Wanderer auf dem ebenen Gitter kommt ebenfalls mit der Wahrscheinlichkeit 1 im Laufe seiner Wanderung wieder nach Hause zum Startpunkt.

3.8 Schwierige Fragen

Beim Nachdenken über unseren Gegenstand stieß ich immer wieder auf Fragen, die ich keineswegs zufriedenstellend beantworten konnte. Das heißt nicht, dass sie nicht einfache Antworten haben können; ich bin kein von der Pike auf gelernter Stochastiker. Hier liste ich solche Probleme auf; es sind keine technischen Übungen, die man einfach so rechnen könnte.

1. Wir haben gesehen, dass Fragestellungen zu gewissen Linearen Zweipolen und zu Zufallswanderungen auf endlichen Ausschnitten aus Gittern auf den gleichen mathematischen Apparat führen, zum Beispiel auf das gleiche Lineare Gleichungssystem. Hat das einen inneren Grund? Verhalten sich die Elektronen in den Leitern wie Zufallswanderer? Der Wanderer geht ziellos, die Elektronen sind den Feldkräften des elektrischen Feldes ausgesetzt – das ist ein wesentlicher Unterschied, den man im Auge behalten muss, wenn man eine Erklärung versucht.

2. Wenn sich ein Wanderer gerade auf dem Rand des Ausschnittes G_k eines ebenen Gitters befindet, kann man fragen, ob sich der Wanderer beim nächsten Schritt eher nach außen zum Rand von G_{k+1} oder nach innen zum Rand von G_{k-1} bewegt. Mit der Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{2}$ bleibt er auf dem Rand von G_k, das ist klar. Aber es zeigen doch mehr Kanten nach außen als nach innen. Sollte sich der Wanderer dann nicht tendenziell vom Zentrum wegbewegen?

3. Wenn man weiß, dass sich der Wanderer auf dem Rand des Ausschnittes G_k eines ebenen Gitters befindet, haben dann alle Gitterpunkte des Randes die gleiche Wahrscheinlichkeit dafür, dass sich der Wanderer gerade in ihnen aufhält? Oder sind die Punkte in der Mitte vor den Eckpunkten bevorzugt oder benachteiligt? Kann man darüber etwas sagen, wenn man nur die Bewegung in x–Richtung beobachtet?

4. Versuche, die Argumentation für die Wanderung auf dem ebenen Gitter auf die Dimension 3 zu übertragen. Was kommt dabei heraus?

3.9 Laufzeitprobleme

Wir wissen, dass der Zufallswanderer auf einem Gitter der Dimension 1 oder der Dimension 2 mit der Wahrscheinlichkeit 1 zum Startpunkt zurückkehrt. Aber wie lange wird die Reise im Mittel dauern? Wir wollen eine Antwort auf diese Frage für das eindimensionale Gitter suchen.

Es seien

$$\ldots, V_{-2}, V_{-1}, V_0, V_1, V_2, \ldots$$

die Ecken des eindimensionalen Gitters. Der Wanderer startet in V_0. Wir wollen mit n_k die Anzahl der Schritte bezeichnen, die der Wanderer im Mittel braucht, um von V_k wieder zu V_0 zu kommen. Wenn sich der Wanderer in V_1 befindet, ist er auf lange Sicht in der Hälfte der Fälle bereits nach einem Schritt in V_0. In der anderen Hälfte der Fälle geht er von V_1 nach V_2. Von V_2 braucht er im Mittel n_1 Schritte, um den einen Schritt nach links zu V_1 zu kommen, von dort noch einmal n_1 Schritte, um endlich nach V_0 zu kommen. Lassen wir den Wanderer eine sehr große Anzahl N von Versuchen in V_1 starten, braucht er also insgesamt

$$\frac{N}{2} \cdot 1 + \frac{N}{2} \cdot (1 + n_1 + n_1)$$

Schritte, um nach V_0 zu kommen. Je Durchführung sind das

$$\frac{1}{2} \cdot 1 + \frac{1}{2} \cdot (1 + 2n_1) = 1 + n_1$$

Schritte[7]. Das heißt, es gilt

$$n_1 = 1 + n_1 \quad ,$$

denn wir haben ja die mittlere Anzahl der Schritte ausgerechnet, die man braucht, um von V_1 nach V_0 zu kommen, und die ist eben n_1.

Das Resultat $n_1 = 1 + n_1$ lässt nur einen Schluss zu, nämlich $n_1 = \infty$. Damit haben wir ein bemerkenswertes Ergebnis erzielt:

6 Satz
Die mittlere Anzahl der Schritte, die ein Zufallswanderer auf einem eindimensionalen Gitter braucht, bis er wieder im Startpunkt ist, ist Unendlich.

Das ist völlig verrückt: Der Wanderer kommt zwar beim Gitter der Dimensionen 1 und 2 mit der Wahrscheinlichkeit 1 wieder zum Startpunkt, aber die mittlere Anzahl der Schritte, die er für eine Reise bis zur Rückkehr braucht, pendelt sich bei häufiger Durchführung des Versuches nicht einmal im eindimensionalen Fall auf einen endlichen Wert ein.

3.10 Dimension 3

Vielleicht hast du versucht, die Argumentation, die bei der Dimension 2 zum Ziel führte, auf den Fall der Dimension 3 zu übertragen. So wie das G_k in Gleichung (5) auf Seite 18 definieren wir für $k \in \mathbb{N}$ den endlichen Ausschnitt

$$W_k := \{\, (x, y, z) \mid x, y, z \in \mathbb{Z}, -k \leq x, y, z \leq k \,\}$$

aus dem räumlichen kubischen Einheitsgitter. Der Wanderer beginnt seine Reise in $V_0 = (0, 0, 0)$, und wir fragen wieder nach der Wahrscheinlichkeit p'_N, dass er einen Punkt auf dem Rand von W_N erreicht, bevor er wieder in V_0 ist. Um diese Wahrscheinlichkeit zu bestimmen, betrachten wir wieder den entsprechenden linearen Zweipol; der Minuspol der Quelle wird in V_0 und der Pluspol in $V_N = (N, 0, 0)$ angelegt. Wir nehmen die gleichen Vereinfachungen vor wie im zweidimensionalen Fall. Um R''_{eff} zu bestimmen, müssen wir herausfinden, wieviele Kanten es zwischen den Gitterpunkten auf dem Rand von W_k und denen auf dem Rand von W_{k-1} gibt. Der Würfel W_k hat die Kantenlänge $2k$, und jede seiner sechs Flächen enthält $(2k + 1)^2$ Gitterpunkte – das G_3 in Abbildung 14 auf der Seite 18 wäre eine Fläche von W_3. Jeder der $(2k - 1)^2$ Gitterpunkte im Inneren der Fläche ist durch eine Kante mit einem Gitterpunkt auf dem Rand von W_{k-1} verbunden; insgesamt gibt es also

$$6(2k - 1)^2$$

Verbindungen zwischen dem Rand von W_k und dem von W_{k-1}. Die Gleichung für R''_{eff} sieht im dreidimensionalen Fall so aus:

$$R''_{eff} = \frac{1}{6 \cdot 1^2} + \frac{1}{6 \cdot 3^2} + \cdots + \frac{1}{6 \cdot (2N-1)^2} = \frac{1}{6} \cdot \sum_{k=1}^{N} \frac{1}{(2k-1)^2} \quad ,$$

und diese Reihe strebt für $N \to \infty$ gegen einen endlichen Wert.

Unser Beweisversuch funktioniert nicht, aber das allein heißt ja noch nichts. Es gibt nun einen berühmten Satz von G. Polya, und der sagt, dass der Wanderer in den Dimensionen 1 und 2 mit der Wahrscheinlichkeit 1 zurückkehrt, für Gitter höherer Dimensionen die Wahrscheinlichkeit aber > 0 ist, dass er nie zurückkehrt.

[7] Wer mit Erwartungswerten rechnen kann, schreibt natürlich sofort die letzte Zeile hin.

3.11 Beschreibung der MuPAD–Dateien

In der Datei 2dUnendlich.mn schickt man den Wanderer auf eine Wanderung auf dem quadratischen Einheitsgitter der Ebene. Startpunkt ist $O(0,0)$; die Anzahl n der Schritte, die die Reise dauern soll, kann man einstellen. Die Datei enthält zwei ausführbare Programme. Beim ersten kann man dem Wanderer bei seiner Reise zuschauen, beim zweiten soll die mittlere Dauer der Reise bis zur Rückkehr gemessen werden. Falls der Wanderer in den n Schritten nicht nach Hause findet, wird die Reisedauer auf $n+1$ gesetzt. Dementsprechend ist der beobachtete Wert kein Schätzwert für die Dauer der Reise bis zur Wiederkehr – diese Zufallsgröße hat ja keinen endlichen Erwartungswert – sondern ein Schätzwert für den Erwartungswert der Zufallsgröße „Schrittzahl bis zur Wiederkehr, maximal aber $n+1$ “ .

Die zweite Datei 2dBox.mn enthält vier ausführbare Programme zu Wanderungen auf dem Ausschnitt aus dem quadratischen Einheitsgitter der Ebene, der in Abbildung 8 auf der Seite 10 dargestellt ist. Beide Dateien hat Sebastian Horstmann erarbeitet.

In den Dateien laufzeit.mn und langzeit.mn wird das Verhalten des Wanderers auf dem endlichen Auschnitt in Abbildung 8 auf Seite 10 mit Hilfsmitteln aus der Theorie Markoffscher Prozesse untersucht.

4 Kommentiertes Literaturverzeichnis

Grundlegende Informationen zur Geometrie der Gitter findet man in dem schönen Buch

[1] David Hilbert und Stephan Cohn–Vossen, Anschauliche Geometrie.
Springer–Verlag Berlin Heidelberg 1932, 1996.

Interessanter, substantieller Stoff, von einem großen Meister allgemeinverständlich dargestellt! Auch Minkowskis Gitterpunktsatz ist dort besprochen. Bei dem Beweis des Satzes, den ich wiedergebe, habe ich mich allerdings an

[2] Jürgen Neukirch, Algebraische Zahlentheorie.
Springer–Verlag Berlin Heidelberg 1992, 2007

orientiert. Es ist ein Standardwerk für Fachleute, für Schülerhand meines Erachtens nicht geeignet.

Wärmstens empfehlen möchte ich das Buch

[3] Olle Häggström, Streifzüge durch die Wahrscheinlichkeitstheorie.
Springer–Verlag Berlin Heidelberg 2006.

Es ist frisch und interessant geschrieben und richtet sich auch an Schüler. Was ich zu Zufallswanderungen bringe, geht im Wesentlichen auf Häggström zurück.

Dass Lineare Zweipole real vorgeführt werden konnten, ist Phillip Durczok aus der Stufe 12 zu verdanken; so wird die physikalische Seite der Sache wirklich greifbar. Und mit den MuPAD–Dateien, die Sebastian Horstmann aus der Stufe 13 programmiert hat, lassen sich Zufallswanderungen in ihrem Ablauf anschaulich verfolgen (2dUnendlich.mn), und es lassen sich durch Versuchsreihen relative Häufigkeiten von Versuchsausgängen gewinnen und mit den theoretisch berechneten Wahrscheinlichkeiten vergleichen (Teil 4 von 2dBox.mn). Sebastian zeigt sich als sehr versierter Benutzer des Programms. Phillip und Sebastian haben sich um die Veranstaltung sehr verdient gemacht.