

Krümmung von Kurven und Flächen

Bernhard Waldmüller und Henrik Schumacher

19. Mai 2007

Inhaltsverzeichnis

0 Was ist Krümmung?	1
1 Kurven, Krümmung und Torsion	1
1.1 Glatte Kurven	1
1.2 Kurvenlänge	2
1.3 Krümmung ebener Kurven	4
1.4 Krümmung und Torsion räumlicher Kurven	6
2 Flächen, Geodäten, Krümmung	8
2.1 Funktionen in zwei Variablen, partielle Ableitungen	8
2.2 Glatte Flächen, Tangentialebene, Gaußabbildung	9
2.3 Geodätische Krümmung und Normalenkrümmung	12
2.4 Gaußsche Krümmung	13

0 Was ist Krümmung?

Jeder hat eine ziemlich genaue Vorstellung davon, was „gerade“ bedeuten soll. Man ist daher versucht, den Begriff „gekrümmt“ zunächst als „nicht gerade“ zu umreißen. Aber damit tut man dem Begriff Unrecht an: Während „gerade“ genau einen einzigen Zustand beschreibt, können gekrümmte Dinge auf ganz unterschiedliche Weise und in unterschiedlichem Maße gekrümmt sein. Insofern ist der Begriff „gerade“ viel einfacher. Dies wirft im Übrigen auch ein interessantes Licht auf die menschliche Psyche, schätzen wir doch ausgerechnet gerade Dinge besonders hoch, obwohl oder gerade weil sie in unserer natürlichen Umgebung so gut wie gar nicht vorkommen.

Ziel dieses Schriftstückes ist es nun, der Krümmung von Kurven und Flächen näher zu kommen und Maßzahlen für sie zu finden, die angemessen wiedergeben, auf welche Weise und wie stark ein Gegenstand gekrümmt sein kann. Außerdem soll Krümmung erfahrbar gemacht werden, indem ihre Auswirkungen in den zahlreichen Anregungen des Skriptes betrachtet werden: Zum einen sollen Phänomene betrachtet werden, die unserer Alltagsvorstellung und unserem intuitiven Raumverständnis genau entsprechen; zum anderen aber soll auch gezeigt werden, dass die Geometrie eines gekrümmten Raumes (z.B. der Erdoberfläche) von unserem intuitiven (oder anerzogenen?) Verständnis des Raumes radikal abweichen kann.

1 Kurven, Krümmung und Torsion

1.1 Glatte Kurven

Jeder hat schon mal eine Kurve auf ein Blatt Papier gemalt: Man setzt einen Stift auf das Papier und bewegt ihn. Dabei hat die Spitze des Stiftes zu jedem Zeitpunkt mit genau einem Punkt des Papiere Kontakt. Mathematisch gesehen ist das eine Funktion: Jedem Punkt t

aus einem Zeitintervall $[a, b]$ wird ein Bildpunkt $\vec{q}(t)$ auf dem Papier zugeordnet. Ersetzt man schließlich das Blatt Papier durch die xy -Ebene und führt kartesische Koordinaten ein, so lässt sich schreiben:

$$\vec{q}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$$

mit zwei reellwertigen Funktionen x und y . In so einem Fall nennen wir $\vec{q}$ eine *ebene (parametrisierte) Kurve*. Normalerweise unterscheidet man zwischen der Kurve als Punktmenge in der Ebene und ihrer Parametrisierung. Denn fährt man das Bild der Kurve nochmals mit einem Stift nach, aber mit anderer Geschwindigkeit, so erhält man das gleiche Bild, aber die Parametrisierung ist eine andere. Wir wollen aber der Einfachheit halber beides mit „Kurve“ bezeichnen. Mit unterschiedlichen Parametrisierungen wollen wir uns später nochmal beschäftigen.

Nun überlegen wir uns, was die Ableitung einer ebenen Kurve sein soll. Den für reellwertige Funktionen bekannten Differenzenquotienten kann man für vektorwertige Funktionen einfach komponentenweise hinschreiben:

$$\frac{1}{h}(\vec{q}(t+h) - \vec{q}(t)) = \begin{pmatrix} \frac{x(t+h)-x(t)}{h} \\ \frac{y(t+h)-y(t)}{h} \end{pmatrix}$$

Dies kann man wie bei Funktionen als Richtung der Sekante der Kurve interpretieren. Dann führt man den Grenzübergang $h \rightarrow 0$ komponentenweise durch. Man erhält dadurch:

$$\frac{d\vec{q}}{dt}(t) = \vec{q}'(t) = \begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix}$$

Somit erkennt man auch, dass $\vec{q}'(t)$ die Richtung der Tangente an die Kurve $\vec{q}$ an der Stelle $\vec{q}(t)$ sein muss. Natürlich muss die Kurve $\vec{q}$ das mit sich machen lassen, deshalb stellt *Differenzierbarkeit* schon eine echte Einschränkung für eine Kurve da. Wieder zu dem Beispiel mit dem Stift zurückkehrend (t ist hier die Zeit) gibt $\vec{q}(t)$ den Geschwindigkeitsvektor des Stiftes zum Zeitpunkt t an: Die Richtung ist die momentane Bewegungsrichtung des Stiftes tangential zur Kurve, der Betrag $|\vec{q}'(t)| = \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}$ ist die Momentangeschwindigkeit. Wir werden im Folgenden mit Kurven arbeiten, die mindestens zweimal differenzierbar sind (man kann nochmals komponentenweise ableiten). Dann entspricht $\vec{q}''(t)$ der Momentanbeschleunigung des Stiftes zum Zeitpunkt t . Wir wollen uns darauf einigen, eine Kurve $\vec{q}$ *glatt* zu nennen, wenn sie zweimal differenzierbar ist und ihre zweite Ableitung keine Sprünge aufweist.

Alles bisher Gesagte kann man genauso auf *räumliche Kurven* $\vec{q}$ übertragen, nur dass jetzt eine dritte Koordinatenfunktion z auftritt. Insbesondere wird die Momentangeschwindigkeit durch $|\vec{q}'(t)| = \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2 + z'(t)^2}$ gegeben. Statt eines Stiftes auf dem Papier stelle man sich z.B. eine Fliege vor, die durch den dreidimensionalen Raum fliegt.

1.2 Kurvenlänge

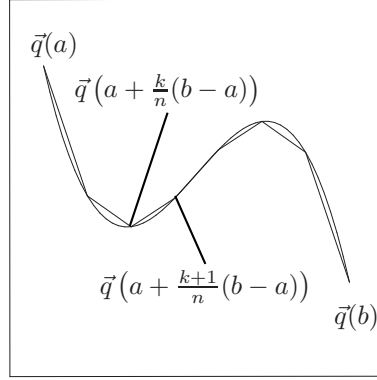
Wir wollen für eine differenzierbare Kurve $\vec{q}$ vom Anfangspunkt $\vec{q}(a)$ zum Endpunkt $\vec{q}(b)$ ihre Länge l bestimmen. Dazu gibt es zwei Ansätze:

Für den ersten definiert man sich die Funktion s , wobei $s(t)$ die Länge der Kurve von $\vec{q}(a)$ nach $\vec{q}(t)$ bedeute. Folglich ist $s(a) = 0$ und $s(b) = l$. Man meint, nicht viel gewonnen zu haben, jedoch ist plausibel, dass $s'(t)$ identisch mit der Momentangeschwindigkeit $\left| \frac{d\vec{q}}{dt}(t) \right|$ sein muss. Mit dem Hauptsatz der Analysis erhält man

$$s(t) = s(t) - s(a) = \int_a^t s'(s) du = \int_a^t \left| \frac{d\vec{q}}{du}(s) \right| du$$

und damit insbesondere

$$l = s(b) = \int_a^b \left| \frac{d\vec{q}}{du}(s) \right| du.$$

Abbildung 1: Polygonzug approximiert die Kurve $\vec{q}$

Alternativ kann man das Intervall $[a, b]$ äquidistant unterteilen durch

$$t_0 = a, t_1 = a + \frac{1}{n}(b-a), t_2 = a + \frac{2}{n}(b-a), \dots, t_{n-1} = a + \frac{n-1}{n}(b-a), t_n = b$$

und den durch die Punkte $\vec{q}(t_k)$, $k = 0, \dots, n$ gegebenen Polygonzug betrachten. Die Länge l_n des Polygonzuges ist dann gegeben durch:

$$l_n = \sum_{k=1}^n |\vec{q}(t_k) - \vec{q}(t_{k-1})|.$$

Setzt man $\Delta t = \frac{b-a}{n}$, kann man ebenso schreiben:

$$l_n = \sum_{k=1}^n |\vec{q}(t_{k-1} + \Delta t) - \vec{q}(t_{k-1})| = \sum_{k=1}^n \left| \frac{\vec{q}(t_{k-1} + \Delta t) - \vec{q}(t_{k-1})}{\Delta t} \right| \Delta t$$

Für $n \rightarrow \infty$ geht $\frac{\vec{q}(t+\Delta t) - \vec{q}(t)}{\Delta t}$ in $\frac{d\vec{q}}{dt}$ über, die Summe ist durch ein Integral und Δt durch dt zu ersetzen:

$$l_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \int_a^b \left| \frac{d\vec{q}}{dt}(t) \right| dt$$

Andererseits schmiegt sich der Polygonzug für größer werdende n immer dichter an die Kurve $\vec{q}$ an, so dass $l_n \rightarrow l$ für $n \rightarrow \infty$. Erneut erhalten wir

$$l = \int_a^b \left| \frac{d\vec{q}}{dt}(t) \right| dt.$$

Außerdem sehen wir jetzt auch auf diesem Wege $\frac{ds}{dt} = \left| \frac{d\vec{q}}{dt} \right| \geq 0$ und sogar $\frac{ds}{dt} > 0$ wenn $\frac{d\vec{q}}{dt} \neq 0$. Die Funktion s ist also eine streng monoton steigende Funktion in t , so dass es eine Umkehrfunktion $t(s)$ gibt. In Zukunft schreiben wir:

$$\vec{q}(s) := \vec{q}(t(s)).$$

Man sagt auch, die Kurve werde durch $\vec{q}(s)$ *natürlich* oder *nach Bogenlänge parametrisiert*. Außerdem besteht zwischen der Ableitung nach t und nach s folgende Beziehung, die man erhält, wenn man die Kettenregel komponentenweise anwendet:

$$\frac{d\vec{q}}{ds} = \frac{d\vec{q}}{dt} \cdot \frac{dt}{ds} = \frac{d\vec{q}}{dt} \cdot \frac{1}{\frac{ds}{dt}} = \frac{d\vec{q}}{dt} \cdot \frac{1}{\left| \frac{d\vec{q}}{dt} \right|}$$

Folglich gilt:

$$\left| \frac{d\vec{q}}{ds} \right| = 1,$$

das heißt, die „Reisegeschwindigkeit“ des Punktes $\vec{q}(s)$ ist konstant 1.

Man beachte schließlich noch, dass es hier ganz egal war, ob ebene oder räumliche Kurven betrachtet werden!

1.3 Krümmung ebener Kurven

Wir sind nun auf der Suche nach einer vernünftigen Definition der Krümmung einer ebenen Kurve. „Vernünftig“ soll heißen, dass die Definition das, was wir uns unter „Krumm-Sein“ vorstellen, auf den Punkt bringen und präzisieren soll. Wir wollen einen Begriff bekommen, der am besten auch die Art und Weise wiedergibt, *wie* sich eine Kurve in der Ebene krümmt, und dies zu einer messbaren Größe macht.

Stellen wir uns einmal vor, wir führen mit einem Auto eine gekrümmte Straße in einer Ebene entlang. Zur Zeit t seien wir dabei an der Stelle $\vec{q}(t) = (x(t), y(t))$. Was passiert in den Kurven? Blicken wir immerzu „geradeaus“ (z.B. indem wir über die Kühlerfigur peilen), in die Richtung unserer momentanen Bewegung (also in Richtung von $\vec{q}'(t)$), so sehen wir, wie sich die Umgebung um uns zu drehen scheint. Eigentlich heißt das, unsere momentane Blick- oder Bewegungsrichtung ändert sich! Dies passiert umso schneller erstens: je schneller wir durch die Kurve fahren und zweitens: je „schärfer“ die Kurve ist. Wir nehmen zwar wahr, dass die Änderungsrate unserer Bewegungsrichtung irgendwie ein Maß für die Krümmung der Kurve ist, störend ist aber, dass die Kurve gleichermaßen gekrümmt ist, egal, wie schnell wir durch sie fahren. Einigen wir uns also darauf, stets mit einer konstanten Referenzgeschwindigkeit zu fahren und nehmen eine natürliche Parametrisierung $\vec{q}(s)$ der Kurve her. Jetzt müssen wir nur noch die Richtungsänderung messen. Da $\left| \frac{d\vec{q}}{ds} \right| = 1$, kann man schreiben:

$$\frac{d\vec{q}}{ds}(s) = \begin{pmatrix} \cos(\alpha(s)) \\ \sin(\alpha(s)) \end{pmatrix}.$$

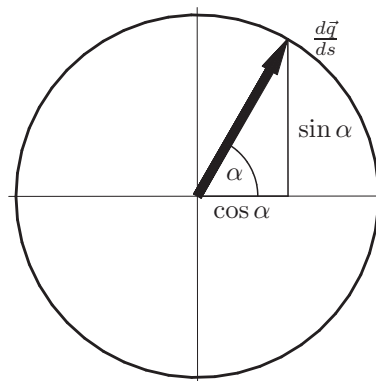


Abbildung 2: Als Punkt auf dem Einheitskreis läßt sich $\frac{d\vec{q}}{ds}$ einem Winkel α zuordnen

Leiten wir das einmal ab, erhalten wir mit der Kettenregel die wichtige Formel:

$$\frac{d^2\vec{q}}{ds^2}(s) = \frac{d\alpha}{ds}(s) \cdot \begin{pmatrix} -\sin(\alpha(s)) \\ \cos(\alpha(s)) \end{pmatrix} =: \frac{d\alpha}{ds}(s) \cdot \vec{n}(s). \quad (1)$$

Dabei nennen wir $\vec{n}$ die *Normale* auf der Kurve. An der obigen Zeile bemerken wir zwei Dinge: Erstens ist $\frac{d^2\vec{q}}{ds^2}(s)$ stets senkrecht auf $\frac{d\vec{q}}{ds}(s)$ (daher auch der Name) und zweitens ist

$$\left| \frac{d\alpha}{ds}(s) \right| = \left| \frac{d^2\vec{q}}{ds^2}(s) \right|. \quad (2)$$

Eben hatten wir uns überlegt, die Änderung $\frac{d\alpha}{ds}$ der Bewegungsrichtung sei ein vernünftiges Maß für die Krümmung der Kurve und definieren deshalb:

$$\kappa(s) := \frac{d\alpha}{ds}(s) \text{ ist die Krümmung der Kurve } \vec{q} \text{ im Punkt } \vec{q}(s).$$

Wir fassen nochmal zusammen:

$$\frac{d^2 \vec{q}}{ds^2}(s) = \kappa(s) \cdot \vec{n}(s), \quad |\kappa(s)| = \left| \frac{d^2 \vec{q}}{ds^2}(s) \right|. \quad (3)$$

Das Vorzeichen von κ gibt die Richtung der Krümmung an: Ist es positiv, so handelt es sich um eine Linkskurve; ist es negativ, so handelt es sich um eine Rechtskurve ($\vec{n}$ ist gegenüber $\frac{d\vec{q}}{ds}$ um 90° im Gegenuhrzeigersinn gedreht).

Nicht immer kann man für eine gegebene Kurve so einfach eine natürliche Parametrisierung angeben. Deshalb wollen wir noch schnell eine Formel ableiten, die uns die Krümmung κ aus den Daten einer beliebigen Parametrisierung $\vec{q}(t)$ errechnet. Dazu nutzen wir die Definition $\kappa = \frac{d\alpha}{ds}$ und

$$\tan \alpha(s) = \frac{y'(t(s))}{x'(t(s))},$$

wobei hier und im Folgenden „ $'$ “ die Ableitung nach t bedeute. Hieraus folgt:

$$\begin{aligned} \kappa(s) &= \frac{d}{ds} \arctan \left(\frac{y'(t(s))}{x'(t(s))} \right) = \frac{1}{1 + \left(\frac{y'(t(s))}{x'(t(s))} \right)^2} \cdot \frac{x' \frac{dy'}{ds} - \frac{dx'}{ds} y'}{x'^2}(t(s)) \\ &= \frac{1}{1 + \left(\frac{y'}{x'} \right)^2} \cdot \frac{x' y'' \frac{dt}{ds} - x'' \frac{dt}{ds} y'}{x'^2}(t(s)) = \frac{1}{x'^2 + y'^2} \cdot \frac{x' y'' - x'' y'}{\frac{ds}{dt}}(t(s)) \\ &= \frac{1}{x'^2 + y'^2} \cdot \frac{x' y'' - x'' y'}{(x'^2 + y'^2)^{\frac{1}{2}}}(t(s)) = \frac{x' y'' - x'' y'}{(x'^2 + y'^2)^{\frac{3}{2}}}(t(s)) \end{aligned}$$

Dabei wurden

$$\arctan'(v) = \frac{1}{1+v^2}, \quad \frac{ds}{dt}(t) = \left| \frac{d\vec{q}}{dt}(t) \right| = \sqrt{x'^2 + y'^2}(t)$$

und natürlich etliche der bekannten Differentiationsregeln benutzt. Wie bisher sind mit x und y die Koordinatenfunktionen von $\vec{q}$ bezeichnet. Die Krümmung der Kurve $\vec{q}$ im Punkt $\vec{q}(t)$ ist also gegeben durch:

$$\kappa(s(t)) = \frac{x' y'' - x'' y'}{(x'^2 + y'^2)^{\frac{3}{2}}}(t). \quad (4)$$

Anregung 1. Zur Probe unserer Definition: Welche Krümmung würdest Du einer Geraden in der Ebene zuschreiben? Berechne nun κ für eine solche Gerade!

Anregung 2. Ein Kreis mit Radius R wird z.B. parametrisiert durch:

$$\vec{q}(t) = R \begin{pmatrix} \cos\left(\frac{t}{R}\right) \\ \sin\left(\frac{t}{R}\right) \end{pmatrix}.$$

Ist $\vec{q}$ eine natürliche Parametrisierung des Kreises? Berechne die erste und zweite Ableitung, $\alpha(t)$ und die Krümmung $\kappa(t)$! Was fällt Dir auf? Wie verhalten sich die Krümmungen von Kreisen mit verschiedenen Radien zueinander? War das zu erwarten?

Anregung 3. Überlege, was die Krümmung der Straße für den Autofahrer bedeutet! Nutze dafür folgende Fragen als Wegweiser:

- Was für eine Bahn beschreibt das Auto, wenn der Fahrer das Lenkrad mit konstantem Einschlagswinkel hält?
- Wie würdest Du den Begriff Krümmungskreis definieren? Welchen Radius hat der Krümmungskreis?
- Wie muss der Fahrer lenken, um einer kurvigen Straße zu folgen? Was hat das mit der Krümmung κ der Straße zu tun?

Anregung 4. Welche Krümmung hat die Parabel gegeben durch

$$\vec{q}(t) = \begin{pmatrix} t \\ a(t - t_0)^2 + c \end{pmatrix}?$$

Anregung 5. Es gilt $\tan = \frac{\sin}{\cos}$ und $\arctan$ ist die Umkehrfunktion zu $\tan$. Daher kann man, wenn man weiß, dass $\sin' = \cos$ und $\cos' = -\sin$ gilt, $\arctan'$ mit Hilfe der üblichen Differentiationsregeln berechnen. Versuche es!

1.4 Krümmung und Torsion räumlicher Kurven

Anregung 6. Stell Dir vor, Du flögest abenteuerliche Kurven mit einem Flugzeug und Du blicktest immerzu genau geradeaus! Abermals siehst Du die Umgebung (je nach dem den Himmel oder den Erdboden) vor Deinen Augen herumwirbeln. Mache Dir klar, dass nicht alles, was Du an Bewegung wahrnimmst, durch die Krümmung der Flugbahn stammen kann, da sich die Geschwindigkeit des Flugzeuges zeitlich ändern und das Flugzeug auch Seitwärtsrollen vollführen kann!

Angenommen, vor Dir wäre ein Fadenkreuz so angebracht, dass Du genau in Flugrichtung schaust, wenn Du an ihm vorbeieilst. Beim Flug geradeaus bei gleichzeitigen seitwärtigen Rollbewegungen scheint sich die Umgebung um es zu drehen. Fliegst Du aber einen Looping, scheint sich der Hintergrund mit einer bestimmten momentanen Winkelgeschwindigkeit am Fadenkreuz vorbei zu bewegen. Reist Du zusätzlich mit konstanter Geschwindigkeit, so ist diese Momentangeschwindigkeit der Umgebung schon eher ein Maß für die Krümmung Deiner Flugbahn!

Auch hier wollen wir mit einer natürlich parametrisierten Kurve $\vec{q}$ im Raum beginnen, d.h.:

$$\frac{d\vec{q}}{ds}(s) * \frac{d\vec{q}}{ds}(s) = 1.$$

Leiten wir dies nochmals nach s ab, so erhalten wir mit der Produktregel (in Komponenten nachrechnen!):

$$2 \frac{d^2\vec{q}}{ds^2}(s) * \frac{d\vec{q}}{ds}(s) = \frac{d}{ds} \left(\frac{d\vec{q}}{ds}(s) * \frac{d\vec{q}}{ds}(s) \right) = \frac{d}{ds} 1 = 0$$

Das bedeutet also, dass der Vektor $\frac{d^2\vec{q}}{ds^2}(s)$ stets senkrecht auf $\frac{d\vec{q}}{ds}(s)$ steht.

Anregung 7. Mache Dir klar, dass es sich bei $-\frac{d^2\vec{q}}{ds^2}(s)$ um die Geschwindigkeit handelt, mit der die Landschaft an dem Fadenkreuz in Deinem gedachten Cockpit vorbei zu ziehen scheint!

Wir schlagen jetzt einen ganz ähnlichen Weg ein, wie bei den ebenen Kurven, indem wir definieren:

$$\kappa(s) := \left| \frac{d^2\vec{q}}{ds^2}(s) \right| \text{ ist die Krümmung der Kurve } \vec{q} \text{ im Punkt } \vec{q}(s). \quad (5)$$

Außerdem definieren wir dort, wo $\frac{d\vec{q}}{ds}(s) \neq 0$ die *Normale* durch $\vec{n}(s) := \frac{1}{\kappa(s)} \frac{d^2\vec{q}}{ds^2}(s)$, so dass wir die folgende zu (3) analoge Formel bekommen:

$$\frac{d^2\vec{q}}{ds^2}(s) = \kappa(s) \cdot \vec{n}(s).$$

Der Geschwindigkeitsvektor $\vec{v}(s) := \frac{d\vec{q}}{ds}(s)$ und die Normale $\vec{n}(s)$ spannen damit stets eine Ebene im Raum auf. Es gibt genau einen Vektor $\vec{b}(s)$ der Länge 1, der senkrecht auf dieser Ebene steht, so dass $\vec{v}(s)$, $\vec{n}(s)$ und $\vec{b}(s)$ so zueinander stehen, wie Daumen, Zeigefinger und Mittelfinger der rechten Hand, wenn man diese senkrecht zueinander abspreizt (vergleiche Rechte-Hand-Regel aus der Physik). Diese drei Vektoren nannte man auch aus naheliegenden Gründen ein *orthogonales Dreibein*.

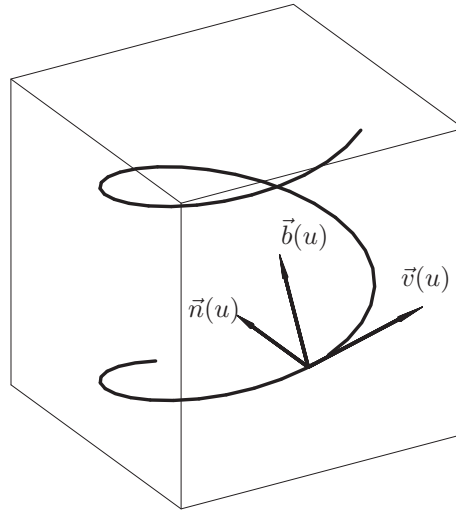


Abbildung 3: Orthogonales Dreibein an einer Schraubenlinie

Es gilt also

$$\vec{b}(s) * \vec{b}(s) = 1 = \text{const}, \quad \vec{b}(s) * \vec{v}(s) = 0 = \text{const}$$

und wenn man diese beiden Gleichungen nach s ableitet (nachrechnen!), bekommt man:

$$2 \cdot \frac{d\vec{b}}{ds} * \vec{b} = \frac{d}{ds} (\vec{b} * \vec{b}) = 0$$

und

$$\frac{d\vec{b}}{ds} * \vec{v} = \frac{d\vec{b}}{ds} * \vec{v} + \kappa \cdot \overbrace{\vec{b} * \vec{n}}^{=0} = \frac{d\vec{b}}{ds} * \vec{v} + \vec{b} * \frac{d\vec{b}}{ds} = \frac{d}{ds} (\vec{b} * \vec{v}) = 0$$

Da $\vec{v}(s)$, $\vec{n}(s)$ und $\vec{b}(s)$ paarweise orthogonal sind, $\frac{d\vec{b}}{ds}(s)$ aber senkrecht sowohl zu $\vec{v}(s)$ als auch zu $\vec{b}(s)$ ist, muss folglich $\frac{d\vec{b}}{ds}(s)$ ein Vielfaches von $\vec{n}$ sein:

$$\frac{d\vec{b}}{ds}(s) = \tau(s) \cdot \vec{n}(s), \quad (6)$$

was uns zur folgenden Definition veranlasst:

$$\text{Diesen Faktor } \tau(s) \text{ nennen wir } \textit{Torsion} \text{ der Kurve } \vec{q} \text{ im Punkt } \vec{q}(s). \quad (7)$$

Hat man keine natürliche Parametrisierung, so kann man mit der Kettenregel errechnen:

$$\frac{d^2 \vec{q}}{ds^2}(s) = \frac{\frac{d^2 \vec{q}}{dt^2}(s) \cdot \frac{ds}{dt} - \frac{d\vec{q}}{dt}(s) \cdot \frac{d^2 s}{dt^2}}{\left(\frac{ds}{dt}\right)^3}(t(s))$$

und hieraus kann man dann Krümmung κ und Torsion τ ermitteln, was wir uns hier aber ersparen wollen. Wir sind eher an der Bedeutung der beiden Größen interessiert und beschäftigen uns daher schließlich mit den folgenden Fragen.

Anregung 8. Betrachte die Raumkurve

$$\vec{q}(t) = \begin{pmatrix} R \cos(\omega t) \\ R \sin(\omega t) \\ \lambda \omega t \end{pmatrix}.$$

Wie sieht die Bahn aus? Bestimme ω so, dass $\vec{q}$ natürlich parametrisiert ist und berechne Krümmung κ und Torsion τ !

Anregung 9. Überlege Dir, was Krümmung und Torsion für den Piloten eines Flugzeuges bedeuten! Nutze folgende Fragen als Wegweiser:

- Ein Flugzeug wird durch Höhen-, Quer- und Seitenruder gesteuert. Nehmen wir an, das Flugzeug habe nur Höhen- und Querruder, die wie üblich mit dem Steuerknüppel bedient werden. Was für eine Bahn vollführt das Flugzeug, wenn der Steuerknüppel gerade nach vorne (hinten, links, rechts) gehalten wird? (Tipp: Stell Dir vor, die Tragflächen des Flugzeuges verliefen parallel zur durch $\vec{b}$ gegebenen Geraden und der Kopf des Piloten befände sich an der Spitze von $\vec{n}$!)
- Wie muss der Pilot den Steuerknüppel bewegen, um einer gegebenen Flugbahn zu folgen? Was hat das mit Krümmung und Torsion zu tun? Gibt es auch hier so etwas wie einen Krümmungskreis? Wenn ja, gib Mittelpunkt und Radius des Krümmungskreises an!

2 Flächen, Geodäten, Krümmung

Die Kurven haben uns relativ wenige Probleme bereitet, weil es ausreichte, einparametrische Funktionen differenzieren zu können. Bei flächenhaften Gebilden wird man aber mit einem Parameter nicht auskommen: Die Tatsache, dass zur Parametrisierung von Flächen zwei Parameter benötigt werden, macht gerade ihren „zweidimensionalen“, flächenhaften Charakter aus. Die Parametrisierung der Kurven hatte zum Ziel, dass man sich auf ihnen zurechtfinden, dort navigieren konnte. Dies wollen wir für Flächen nachahmen und einige wichtige Begriffe notieren. Zunächst müssen wir uns aber mit partiellen Ableitungen beschäftigen, ein Phänomen, das so erst bei Funktionen in mehreren Variablen auftritt.

2.1 Funktionen in zwei Variablen, partielle Ableitungen

Wir betrachten eine Funktion f in zwei reellen Argumenten u_1 und u_2 mit Werten in den reellen Zahlen. Die beiden Werte u_1 und u_2 kann man auch als Koordinaten eines Punktes

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$$

in der Ebene interpretieren und umgekehrt. Hält man $u_2 = b$ konstant und behält den Wert von u_1 als Variable, bekommt man eine ganz gewöhnliche Funktion $u_1 \mapsto f(u_1, b)$, und falls

die differenzierbar ist, kann man die *partielle Ableitung* $\frac{\partial f}{\partial u_1}$ von f nach u_1 an der Stelle (a, b) wie folgt definieren:

$$\frac{\partial f}{\partial u_1}(a, b) := \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h, b) - f(a, b)}{h}.$$

Das ist gerade die Ableitung der Funktion $u_1 \mapsto f(u_1, b)$ an der Stelle $u_1 = a$. Ganz genauso definiert man die *partielle Ableitung* $\frac{\partial f}{\partial u_2}$ von f nach u_2 an der Stelle (a, b) :

$$\frac{\partial f}{\partial u_2}(a, b) := \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a, b+h) - f(a, b)}{h}.$$

Die „ ∂ “ sind einfach runde „ d “ und sollen nichts weiter besagen, als dass man hier partiell ableitet. Man braucht keine Angst vor ihnen zu haben. Existieren

$$\frac{\partial f}{\partial u_1}(a, b) \text{ und } \frac{\partial f}{\partial u_2}(a, b),$$

so heißt f bei (a, b) *partiell differenzierbar*; existieren die beiden partiellen Ableitungen an jeder Stelle in der Ebene, dann nennt man f *partiell differenzierbar*. Die partiellen Ableitungen von f sind wieder reellwertige Funktionen in zwei Variablen!

Gehen wir noch einen Schritt weiter und betrachten ein Tripel $\vec{F}$ von Funktionen in zwei Variablen, also:

$$\vec{F}(u_1, u_2) = \begin{pmatrix} x(u_1, u_2) \\ y(u_1, u_2) \\ z(u_1, u_2) \end{pmatrix}.$$

Dann definiert man analog die *partiellen Ableitungen von $\vec{F}$ nach u_1 bzw. nach u_2 an der Stelle (a, b)* folgendermaßen:

$$\frac{\partial \vec{F}}{\partial u_1}(a, b) := \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u_1}(a, b) \\ \frac{\partial y}{\partial u_1}(a, b) \\ \frac{\partial z}{\partial u_1}(a, b) \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \frac{\partial \vec{F}}{\partial u_2}(a, b) := \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u_2}(a, b) \\ \frac{\partial y}{\partial u_2}(a, b) \\ \frac{\partial z}{\partial u_2}(a, b) \end{pmatrix}.$$

Die partiellen Ableitungen wurden also einfach komponentenweise angewandt. Die partiellen Ableitungen von $\vec{F}$ sind wieder vektorwertige Funktionen, die man wiederum auch ableiten kann, was zu partiellen Ableitungen zweiter Ordnung führt! Das wird gleich noch sehr wichtig werden, wenn wir versuchen, diesen Formeln etwas Leben einzuhauchen.

2.2 Glatte Flächen, Tangentialebene, Gaußabbildung

Fahren wir mit der vektorwertigen Funktion $\vec{F}$ aus dem letzten Kapitel fort, nehmen aber die Werte (u_1, u_2) nur aus einem Teilgebiet U der Ebene, zum Beispiel einem Kreis oder einem Rechteck und betrachten $\vec{F}$ als eine Abbildung von dem Teil U der Ebene in den Raum. Jedem Punkt (u_1, u_2) in U wird ein Punkt $\vec{F}(u_1, u_2)$ im Raum mit den Koordinaten $x(u_1, u_2)$, $y(u_1, u_2)$ und $z(u_1, u_2)$ zugeordnet.

Anregung 10. *Stell Dir vor, auf Deinem Tisch stünde ein Modell einer schönen, grünen, hügeligen Landschaft. Führe in Gedanken ein cartesisches Koordinatensystem auf der Tischplatte ein und ordne jedem Punkt (u_1, u_2) auf der Tischplatte die Höhe $h(u_1, u_2)$ des senkrecht über ihm liegenden Punktes der Landschaft zu. Ergänzt Du jetzt das Koordinatensystem auf der Tischplatte durch die senkrecht nach oben zeigende z -Achse, so hat der Punkt über (u_1, u_2) die Raumkoordinaten*

$$\vec{F}(u_1, u_2) := \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ h(u_1, u_2) \end{pmatrix}$$

und $\vec{F}$ ist dann eine Parametrisierung der Oberfläche der Landschaft.

Solche schönen, sanft gewellten Hügellandschaften ohne Spitzen und Felsgrate wollen wir untersuchen. Um das mathematisch sicherzustellen, müssen wir noch ein paar Begriffe einführen: Wir nennen eine Parametrisierung $\vec{F}$ *glatt*, wenn ihre partiellen Ableitungen bis zur zweiten Ordnung, also

$$\frac{\partial \vec{F}}{\partial u_1}, \frac{\partial \vec{F}}{\partial u_2}, \frac{\partial^2 \vec{F}}{\partial u_1^2}, \frac{\partial^2 \vec{F}}{\partial u_2^2} \text{ und } \frac{\partial^2 \vec{F}}{\partial u_1 \partial u_2},$$

sämtlich und überall existieren und keine Sprünge (Unstetigkeiten) aufweisen. Eine glatte Parametrisierung, bei der erstens: zu jedem Bildpunkt $\vec{P}$ im Raum genau ein Punkt (u_1, u_2) in U mit $\vec{P} = \vec{F}(u_1, u_2)$ gehört und zweitens: die beiden partiellen Ableitungen

$$\frac{\partial \vec{F}}{\partial u_1} \text{ und } \frac{\partial \vec{F}}{\partial u_2}$$

nie parallel oder $= \vec{0}$ sind, wollen wir (*elementares*) *Flächenstück* nennen. (Wie bei den Kurven sollte man eigentlich zwischen der Fläche als Punktmenge und ihrer Parametrisierung unterscheiden.) Man kann sich das in etwa so vorstellen: Durch $\vec{F}$ wird das Gebiet U zu einem gebogenen Flächenstück im Raum deformiert. Die erste Bedingung besagt, dass sich die entstandene Fläche *nicht* selbst durchdringt. Da jetzt jedem Punkt (u_1, u_2) in U genau ein Punkt $\vec{F}(u_1, u_2)$ entspricht, nennt man $\vec{F}$ auch *krummliniges Koordinatensystem* des Flächenstückes.

Die zweite Bedingung stellt den flächenhaften Charakter sicher, denn sie besagt, dass es an jedem Punkt der Fläche eine *Tangentialebene* gibt, die eben durch die beiden Vektoren

$$\frac{\partial \vec{F}}{\partial u_1} \text{ und } \frac{\partial \vec{F}}{\partial u_2}$$

aufgespannt wird. Diese sind als Ableitungen von Kurven in der Fläche tangential an dieselbe.

Anregung 11. Sei $R > 0$, $U = \mathbb{R} \times]-\pi, \pi[$ und definiere:

$$\vec{F}(u_1, u_2) = \begin{pmatrix} R \cos(u_2) \\ R \sin(u_2) \\ u_1 \end{pmatrix}$$

Was für ein Objekt wird durch $\vec{F}$ gegeben? Handelt es sich dabei um ein Flächenstück? Wähle einen festen Punkt (a, b) in U und betrachte die beiden Kurven

$$t \mapsto \vec{F}(t, b) \text{ und } t \mapsto \vec{F}(a, t).$$

Diese Kurven nennt man auch Koordinatenlinien — warum? Ist Dir jetzt klar, was mit „krummlinigen Koordinaten“ gemeint ist?

Anregung 12. Sei $R > 0$, $U =]-\pi, \pi[\times]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ und definiere:

$$\vec{F}(u_1, u_2) = \begin{pmatrix} R \cos(u_1) \cos(u_2) \\ R \sin(u_1) \cos(u_2) \\ R \sin(u_2) \end{pmatrix}$$

Was für ein Objekt wird hier beschrieben? Ist das ein elementares Flächenstück? Wie sehen hier die Koordinatenlinien aus? Woher kennst Du sie?

Außerdem kann man jetzt eine Kurve $\vec{q}$ in der Fläche (das ist eine räumliche Kurve) auch durch eine ebene Kurve $\vec{p}$ in U darstellen: Wähle dazu $\vec{p}(t) := (u_1(t), u_2(t))$ so dass stets $\vec{q}(t) = \vec{F}(u_1(t), u_2(t)) = \vec{F}(\vec{p}(t))$ gilt. Jeder ebenen Kurve $\vec{p}$ in U entspricht dann genau eine räumliche Kurve $\vec{q}$ und umgekehrt.

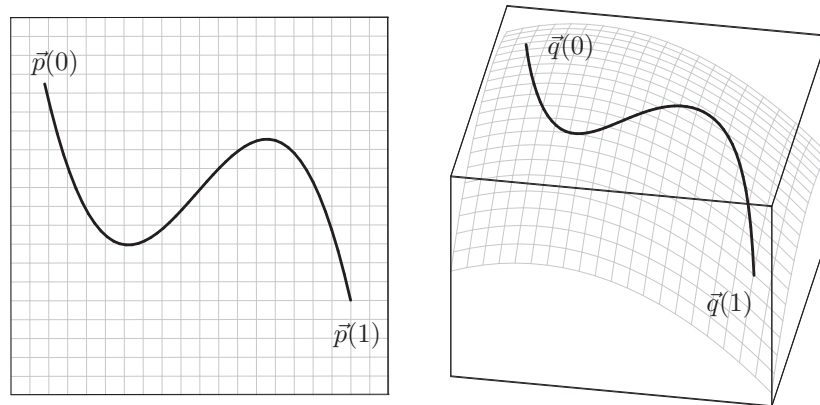


Abbildung 4: Ebene Kurve $\vec{p}$ wird durch $\vec{F}$ auf räumliche Kurve $\vec{q}$ abgebildet

Schließlich benötigen wir noch die *Gaußabbildung* $\vec{N}$. Dabei ist $\vec{N}(u_1, u_2)$ derjenige Einheitsvektor im Raum, der senkrecht auf

$$\frac{\partial \vec{F}}{\partial u_1}(u_1, u_2) \text{ und } \frac{\partial \vec{F}}{\partial u_2}(u_1, u_2)$$

steht und mit diesen ein Rechtssystem bildet, d.h.

$$\frac{\partial \vec{F}}{\partial u_1}(u_1, u_2), \frac{\partial \vec{F}}{\partial u_2}(u_1, u_2) \text{ und } \vec{N}(u_1, u_2)$$

verhalten sich zueinander wie Daumen, Zeigefinger und Mittelfinger der rechten Hand. Dann ist $\vec{N}(u_1, u_2)$ also die Einheitsnormale auf der Tangentialebene und man sagt auch, $\vec{N}(u_1, u_2)$ stehe senkrecht auf der Fläche.

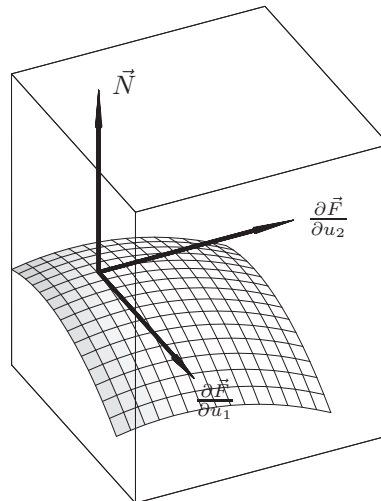


Abbildung 5: Die Gaußabbildung oder Normale auf einer Fläche

Anregung 13. Bestimme die Gaußabbildungen zu den in den vorherigen beiden Anregungen behandelten Flächenstücken!

2.3 Geodätische Krümmung und Normalenkrümmung

Wir wollen jetzt eine erste Annäherung an den Begriff der Krümmung einer Fläche wagen. Stellen wir uns nochmal vor, wir wären mit dem Auto unterwegs, diesmal allerdings nicht in der Ebene, sondern auf einer hügeligen Fläche, die durch $\vec{F}$ parametrisiert sei. Die Route, die wir fahren, sei durch $\vec{q}(s)$ natürlich parametrisiert (wir reisen also mit konstanter Geschwindigkeit). Peilen wir wieder über die Kühlerfigur, so sehen wir, dass sich der Hintergrund relativ zu ihr nicht nur nach links und rechts bewegt, wie es in der Ebene war, sondern dass er sich jetzt auch aufwärts bewegen kann, wenn wir über die Kuppe eines Hügels fahren. Durchqueren wir die Senke eines Tales, so scheint sich der Hintergrund abwärts zu bewegen. Die Seitwärtsbewegung wird durch das Lenken des Autos hervorgerufen, aber die Bewegung in der (von uns aus gesehenen) Vertikalen können wir als Insassen des Fahrzeuges nicht beeinflussen: Die Ursache ist das Gelände oder genauer: die Krümmung des Geländes. Wir haben bereits in den vorherigen Abschnitten verstanden, dass diese scheinbare Bewegung der Landschaft mit der Bewegung $\frac{d^2\vec{q}}{ds^2}(s)$ unserer Blickrichtung $\frac{d\vec{q}}{ds}(s)$ zusammenhängt. Wir wollen $\frac{d^2\vec{q}}{ds^2}(s)$ in Horizontal- und Vertikalkomponenten zerlegen (wir erinnern uns: $\frac{d^2\vec{q}}{ds^2}(s)$ und $\vec{v}(s)$ waren stets senkrecht aufeinander) und nutzen dazu die Gaußabbildung $\vec{N}$. Die Kurve $\vec{p} = (u_1(s), u_2(s))$ in U sei so ausgewählt, dass $\vec{F}(\vec{p}(s)) = \vec{q}(s)$ gilt. Für den Moment sei $\vec{B}(s)$ derjenige Einheitsvektor, der senkrecht zu $\vec{N}(\vec{p}(s))$ und $\vec{v}(s)$ ist und mit diesen ein Rechtssystem bildet ($\vec{N}(\vec{p}(s))$, $\vec{v}(s)$ und $\vec{B}(s)$ verhalten sich wie Daumen, Zeigefinger und Mittelfinger der rechten Hand). Dann kann man $\frac{d^2\vec{q}}{ds^2}(s)$ wie folgt orthogonal zerlegen:

$$\frac{d^2\vec{q}}{ds^2}(s) = \overbrace{\left(\frac{d^2\vec{q}}{ds^2}(s) * \vec{N}(\vec{p}(s))\right)}^{\kappa_N :=} \cdot \vec{N}(\vec{p}(s)) + \overbrace{\left(\frac{d^2\vec{q}}{ds^2}(s) * \vec{B}(s)\right)}^{\kappa_G :=} \cdot \vec{B}(s).$$

Die Zahl κ_G ist ein Maß für die Krümmung der Kurve $\vec{q}$ in der Ebene und wird *geodätische Krümmung* genannt. Die geodätische Krümmung gibt an, wie stark der Fahrer eines Autos einlenken muss, um durch eine Kurve mit dieser Krümmung zu fahren: Der Kehrwert gibt den Radius des Krümmungskreises an, den das Auto in einer Ebene (z.B. der Tangentialebene) vollführen würde. Insofern entspricht die geodätische Krümmung der Krümmung einer ebenen Kurve. Eine Kurve $\vec{q}$ in der Fläche $\vec{F}$ mit geodätischer Krümmung 0 nennt man daher auch eine *Gerade* oder *Geodäte in der Fläche*. Fährt man mit dem Auto auf einer Geodäten entlang, so muss man das Lenkrad einfach in Mittelstellung festhalten; man fährt einfach „geradeaus“. Daher verwundert es auch nicht, dass Wege kürzester Verbindung zweier Punkte immer auf einer Geodäten liegen. Man fährt dann sozusagen keine unnötigen Schlenker!

Anregung 14. Was sind die Geodäten oder „Geraden“ auf einer Kugel? Welche Flugroute sollte man also wählen, wenn man zwischen zwei Städten auf der nördlichen Hemisphäre reisen will? Was ist merkwürdig am Schnittverhalten der Geraden auf einer Kugel im Vergleich zum Schnittverhalten von Geraden in der euklidischen Ebene?

Im Gegensatz zur geodätischen Krümmung ist die sogenannte *Normalenkrümmung* κ_N aber eine Größe, die nur von der Fläche selbst und von der momentanen Bewegungsrichtung $\vec{v}$ abhängt. Das erkennt man, wenn man die Gleichung

$$\vec{v}(s) * \vec{N}(\vec{p}(s)) = 0 = \text{const}$$

mit Hilfe der Produktregel nach s ableitet:

$$\underbrace{\frac{d^2\vec{q}}{ds^2}(s)}_{\frac{d\vec{v}}{ds}(s)} * \vec{N}(\vec{p}(s)) + \vec{v}(s) * \frac{d}{ds}(\vec{N}(\vec{p}(s))) = \frac{d}{ds}(\vec{v}(s) * \vec{N}(\vec{p}(s))) = \frac{d}{ds}0 = 0.$$

Durch Umstellen und Einsetzen bekommt man:

$$\begin{aligned}\kappa_N &= \frac{d^2 \vec{q}}{ds^2}(s) * \vec{N}(\vec{p}(s)) \\ &= -\vec{v}(s) * \frac{d}{ds} \vec{N}(\vec{p}(s)) \\ &= -\vec{v}(s) * \left(\frac{\partial \vec{N}}{\partial u_1} \frac{du_1}{ds}(s) + \frac{\partial \vec{N}}{\partial u_2} \frac{du_2}{ds}(s) \right).\end{aligned}$$

Wir sehen: Die rechte Seite hängt nur von $\vec{N}$ — das ist ein Datum der Fläche — und höchstens von der ersten Ableitung von $\vec{q}$ bzw. von $\vec{p}$ — das sind wiederum Daten der Kurve, die aber nur ihre momentane Tangentenrichtung betreffen! Das entspricht unserer am Anfang gemachten Überlegung, die Auf- und Abbewegung des Hintergrundes relativ zur Kühlerfigur werde allein durch die Krümmung des Geländes und nicht durch die Lenkbewegungen des Fahrers verursacht! Allerdings gehen in $\vec{N}$ die partiellen Ableitungen von $\vec{F}$ ein, so dass irgendwo in den partiellen Ableitungen von $\vec{N}$ die partiellen Ableitungen zweiter Ordnung von $\vec{F}$ stecken. Dies ist der Grund dafür, dass wir von $\vec{F}$ zweimalige Differenzierbarkeit verlangt haben. Anscheinend liefern uns die Normalenkrümmungen Informationen über die Krümmungseigenschaften der Fläche. Wieder sehen wir analog zu den Kurven, dass Krümmung wesentlich durch zweite Ableitungen bestimmt wird.

Betrachtet man nun die Normalenkrümmungen in alle Tangentialrichtungen $\vec{v}$ an einem festen Punkt $\vec{F}(u_1, u_2)$, so gibt es jeweils eine Richtung $\vec{v}_1$, für die $\kappa_N = \kappa_1$ minimal und eine Richtung $\vec{v}_2$, für die $\kappa_N = \kappa_2$ maximal wird. Dann nennen wir $\vec{v}_1$ und $\vec{v}_2$ *Hauptkrümmungsrichtungen von $\vec{F}$ an der Stelle (u_1, u_2)* . Die dazugehörigen Krümmungen κ_1 und κ_2 werden *Hauptkrümmungen zu den Hauptkrümmungsrichtungen* genannt. Es kann auch passieren, dass jede Richtung $\vec{v}$ eine Hauptkrümmungsrichtung ist, wie zum Beispiel bei einer Kugel. Ist dies aber nicht der Fall, so kann man zeigen (was wir hier nicht durchführen wollen), dass die Hauptkrümmungsrichtungen $\vec{v}_1$ und $\vec{v}_2$ immer senkrecht zueinander sind. Das ist schon eigenartig genug. Einer aber noch viel erstaunlicheren Tatsache über die Hauptkrümmungen werden wir gleich im nächsten Abschnitt begegnen!

Anregung 15. Bestimme die Hauptkrümmungen einer Kugelschale mit Radius R . Nutze dabei die Symmetrien der Kugel, indem Du beispielsweise für $\vec{q}$ eine Parametrisierung des Äquators oder des Nullmeridians benutzt. Vielleicht hilft auch Anregung 12.

Anregung 16. Betrachte nochmal den Zylinder aus Anregung 11. Bestimme die Hauptkrümmungsrichtungen $\vec{v}_1$ und $\vec{v}_2$ und Hauptkrümmungen κ_1 und κ_2 am Punkt $(R, 0, 0)$.

2.4 Gaußsche Krümmung

Werfen wir noch einmal einen Blick auf die ebenen Kurven. Dort hatten wir die Änderung $\frac{d\vec{v}}{ds}$ der momentanen Bewegungsrichtung $\vec{v}$ als Maß für die Krümmung der Kurve betrachtet. Ebenso ist die Änderung $\frac{d\vec{n}}{ds}$ der Normalen $\vec{n}$ ein Maß für die Krümmung, da $\vec{n}$ stets senkrecht zu $\vec{v}$ ist (wir erinnern uns) und beide somit die gleiche Rotationsgeschwindigkeit haben. Da $\vec{n}$ nach Definition stets die Länge 1 hat, können wir dies als Punkt auf dem Einheitskreis interpretieren. Betrachtet man nun den Kreisbogen zwischen $\vec{q}(t)$ bis $\vec{q}(t + \Delta t)$, so ist die Länge dieses Bogens gerade der Winkel $\alpha(t + \Delta t) - \alpha(t)$ zwischen $\vec{n}(t)$ und $\vec{n}(t + \Delta t)$ in Bogenmaß. Dann gilt außerdem:

$$\kappa = \frac{d\alpha}{ds}(t) = \frac{d\alpha}{dt}(t(s)) \frac{dt}{ds}(s) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\alpha(t + \Delta t) - \alpha(t)}{s(t + \Delta t) - s(t)}$$

Grob formuliert bedeutet das:

$$\kappa = \lim \frac{\text{Bogenlänge (mit Vorzeichen), die } \vec{n} \text{ auf dem Einheitskreis überstreicht}}{\text{Bogenlänge, die } \vec{q} \text{ auf der Kurve überstreicht}}$$

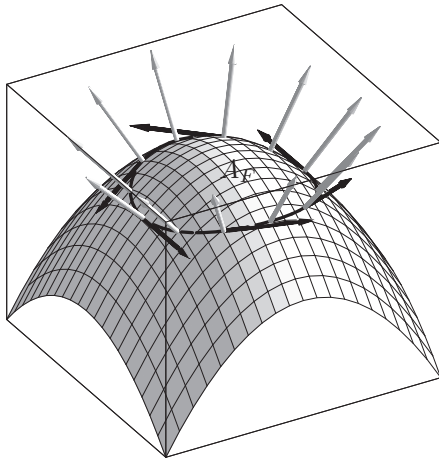


Abbildung 6: Die Kurve in der Fläche umschließt das Gebiet A_F im Gegenuhreigersinn.

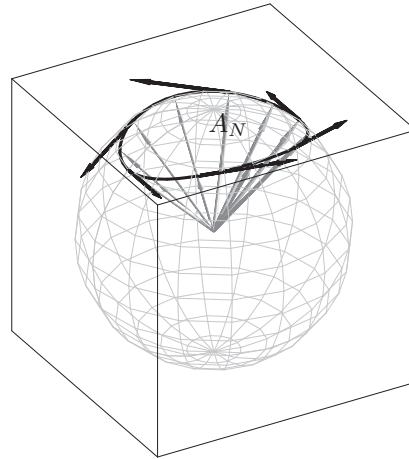


Abbildung 7: Die dazugehörige Kurve der Gaußabbildung umschließt das Gebiet A_N auch im Gegenuhreigersinn.

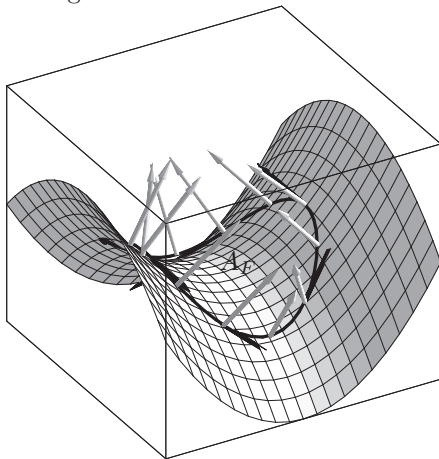


Abbildung 8: Die Kurve in der Fläche umschließt das Gebiet A_F im Uhrzeigersinn.

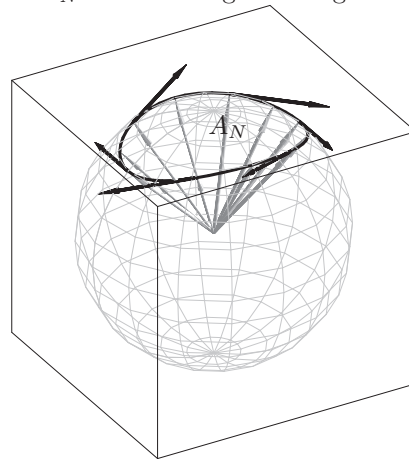


Abbildung 9: Die dazugehörige Kurve der Gaußabbildung umschließt das Gebiet A_N aber im Uhrzeigersinn.

Für eine Fläche $\vec{F}$ im Raum möchten wir das ganz analog nachvollziehen. Wir ersetzen hier also die Kurve $\vec{q}$ durch die Fläche $\vec{F}$ und die Normale $\vec{n}$ durch die Normale $\vec{N}$. Da $\vec{N}$ stets die Länge 1 hat, können wir das auch als Punkt auf der Einheitskugel interpretieren. Dazu sei V ein Stück des Definitionsbereiches U von $\vec{F}$, das durch eine ebene Kurve $\vec{p}$ berandet wird. Zum Beispiel kann V ein Kreis sein und $\vec{p}(t)$ läuft dem Rand einmal um den Kreis. Oder V ist ein Rechteck und $\vec{p}(t)$ durchläuft nacheinander die Kanten des Rechteckes. Durch $\vec{F}$ und $\vec{N}$ wird V dann jeweils auf ein Flächenstück A_F auf der durch $\vec{F}$ gegebenen Fläche bzw. A_N auf der Einheitskugel abgebildet. Entsprechend sind $\vec{F}(\vec{p}(t))$ und $\vec{N}(\vec{p}(t))$ Kurven, die A_F bzw. A_N umranden. Wir definieren jetzt $\text{Inh } A_F$ als den *orientierten Flächeninhalt*, indem wir sagen, der Betrag $|\text{Inh } A_F|$ soll gerade der Flächeninhalt des Flächenstückes A_F sein und das Vorzeichen soll positiv sein, wenn $\vec{F}(\vec{p}(t))$ von „oben“ betrachtet („oben“ ist dort, wo $\vec{N}$ hinzeigt) A_F im Gegenuhreigersinn umläuft. Andernfalls ist $\text{Inh } A_F$ negativ. Zum besseren Verständnis beachte Anregung 17. Ganz entsprechend definiert man $\text{Inh } A_N$.

Analog wie bei den Kurven definiert man schließlich die *Gauß-Krümmung* K durch:

$$\begin{aligned} K &:= \lim_{\text{Inh}(A_F) \rightarrow 0} \frac{\text{Inh } A_N}{\text{Inh } A_F} \\ &= \lim \frac{\text{Flächeninhalt, der von } \vec{N} \text{ auf der Sphäre überstrichen wird}}{\text{Flächeninhalt, der von } \vec{F} \text{ auf der Fläche überstrichen wird}} \end{aligned}$$

Aus der Definition geht hervor, dass die Gauß-Krümmung irgendwie das Neigungsverhalten der Tangentialebene beschreibt, denn die Neigung der Tangentialebene wird ja gerade durch deren Normale $\vec{N}$ charakterisiert! Was genau aber die Gauß-Krümmung ausdrückt, liegt nicht so ganz auf der Hand.

Anregung 17. Betrachte den Abschnitt „Fläche“ im maple worksheet *krueemmung.mws* von Herrn Waldmüller! Dort werden einige A_F und A_N mit umrandenden Kurven für eine vorgegebene Fläche f geplottet. Ändere auch die Parameter a und b . Wie sieht die Fläche aus, wenn beide das gleiche Vorzeichen haben? Was passiert, wenn die Vorzeichen unterschiedlich sind („Salatschüssel“ oder „Sattelfläche“)? Wie wirkt sich das auf das Vorzeichen der Gauß-Krümmung aus?

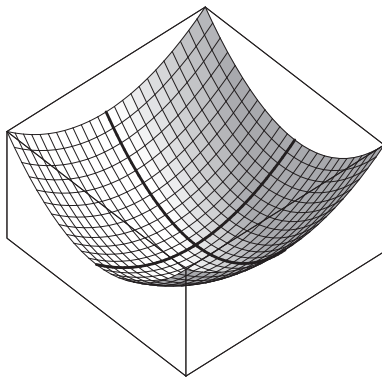


Abbildung 10: Salatschüssel

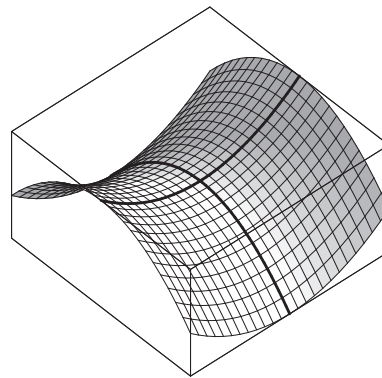


Abbildung 11: Sattelfläche

Ganz erstaunlich ist jetzt, dass es einen unmittelbaren Zusammenhang zwischen den Hauptkrümmungen κ_1 und κ_2 einerseits und der Gauß-Krümmung K andererseits gibt, dessen Schlichtheit einfach entmachtend ist:

$$K = \kappa_1 \cdot \kappa_2.$$

Der Beweis ist etwas mühselig und soll deswegen hier übergangen werden. Abermals können wir aber feststellen, dass „Salatschüsseln“ positive Gauß-Krümmung besitzen, denn zwei Kurven durch denselben Punkt krümmen sich stets in die gleiche Richtung (vgl. Abb. 10). Das heißt insbesondere, dass die Hauptkrümmungen beide das gleiche Vorzeichen haben, die Gauß-Krümmung also positiv ist. Bei Sattelflächen hingegen krümmen sich Kurven, die zu den Hauptkrümmungsrichtungen gehören, stets in entgegengesetzte Richtungen (vgl. Abb. 11): Die Hauptkrümmungen haben verschiedene Vorzeichen und die Gauß-Krümmung ist demzufolge negativ. Man kann also wenn man die Fläche sieht, stets das Vorzeichen der Gauß-Krümmung bestimmen.

Anregung 18. Da die Hauptkrümmungen des Zylindermantels aus Anregung 16 bekannt sind: Welche Gauß-Krümmung hat der Zylindermantel? Hättest Du das gedacht?

Die Gauß-Krümmung ist eine sehr erstaunliche Größe. Man kann zeigen, dass es ausreicht, Längen und Winkel *in* der Fläche messen zu können, um die Gauß-Krümmung zu bestimmen. Das bedeutet zum einen, landvermessende Flächenbewohner haben prinzipiell eine Chance, um festzustellen, ob sie in einer gekrümmten Welt leben. (Dies besagt gleichwohl, dass die Krümmung ihrer Welt Einfluss auf ihr Leben hat!) Zur Bestimmung der Krümmung braucht man folglich keine Daten mehr aus dem umgebenden dreidimensionalen Raum. Deshalb sagt man auch, die Gauß-Krümmung sei eine *intrinsische* Größe. Zum anderen bedeutet das aber auch, dass die Gauß-Krümmung an jedem Punkt gleich bleibt, wenn man die Fläche längenerhaltend auf eine andere Fläche abbildet! Anders gesagt: Zwei Flächen, die sich längenerhaltend aufeinander abbilden lassen, müssen an den einander zugeordneten Punkten die gleich Gauß-Krümmung besitzen!

Anregung 19. Bestimme die Gauß-Krümmung einer Kugel mit Radius R . (Wie groß waren nochmal die Hauptkrümmungen?) Bestimme die Gauß-Krümmung einer Ebene im Raum. Kann man ein Stück der Kugelschale längenerhaltend auf ein Stück der Ebene abbilden? Was bedeutet das für Kartographen?

Der Satz über die Unmöglichkeit, auch nur ein beliebig kleines Stück einer Kugelschale verzerrungsfrei (das heißt längenerhaltend) auf die Ebene abzubilden, ist ein berühmtes Resultat von Carl Friedrich Gauß. Da es so erstaunlich und bedeutend war, nannte er es *theorema egregium* oder zu deutsch: *herausragender Satz*.

Anregung 20. Kann man ein Stück des Zylindermantels längenerhaltend auf die Ebene abbilden? Verwundert Dich der Wert der Gauß-Krümmung des Zylindermantels noch immer?

Eine andere erstaunliche Tatsache ist, dass die Gauß-Krümmung einer Fläche die Winkelsumme eines Dreiecks beeinflusst. Dabei werde ein Dreieck in einer gekrümmten Fläche wie in der Ebene durch drei Geodäten begrenzt. Zum Beispiel besagt der berühmte Satz von Gauß-Bonnet für die Winkelsumme S eines Dreiecks Δ auf irgendeiner Fläche:

$$S = \pi + \int_{\Delta} K \, dA.$$

Da der Flächeninhalt der gesamten Oberfläche einer Kugel mit Radius R gleich $4\pi R^2$ und $K = R^{-2}$, kann S jeden Wert zwischen π und 5π annehmen:

$$S = \pi + \int_{\Delta} K \, dA = \pi + \frac{\text{Inh } \Delta}{R^2}.$$

Für die Ebene gilt z.B. noch $S = \pi$, da sie ja flach ist ($K = 0$).

Im Satz von Gauß-Bonnet offenbart sich schließlich, dass zumindest theoretisch die Möglichkeit besteht, die Gauß-Krümmung einer Fläche in einem Punkt intrinsisch zu bestimmen. Für hinreichend kleine Dreiecke kann man nämlich K als konstant annehmen:

$$S \approx \pi + K \cdot \text{Inh } \Delta.$$

So kann man aus der Winkelsumme (die kann man in der Fläche messen) und aus dem Flächeninhalt von Δ (auch den kann ein guter Landvermesser näherungsweise durch Triangulierung bestimmen) Rückschlüsse auf K machen:

$$K \approx \frac{S - \pi}{\text{Inh } \Delta}.$$