

Zur Biegelinie

Vortrag beim Mathematischen Samstag von Hartmut Bruns, Petershagen,
frei nacherzählt von B. Waldmüller

11. Juli 2007

Inhaltsverzeichnis

1	Einführung	2
2	Ein wenig Physik aus der Stufe 8	2
3	Wirkung des Gewichtes auf einen Punkt der Biegelinie	3
4	Antwort des Brettes	4
5	Eine Differentialgleichung für die Biegelinie	5
6	Kritische Betrachtung der Lösung	6
7	Numerische Lösung von Gleichung 5	6
8	Anmerkungen	7

1 Einführung

Wenn man im Schwimmbad ein Sprungbrett betritt, biegt es sich durch. Wir wollen versuchen, die Form des Bretts durch eine Kurve zu beschreiben. Die gesuchte Kurve nennen wir Biegelinie.

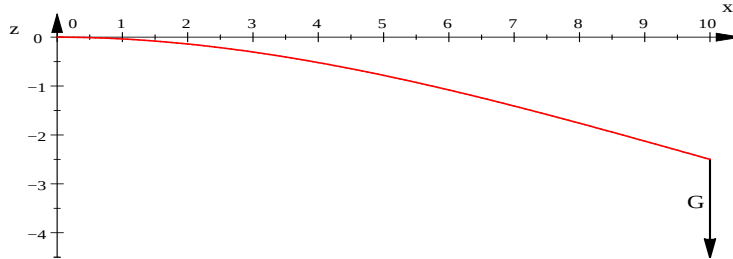


Abbildung 1: Ein Sprungbrett, belastet durch ein Gewicht G , bildet eine Biegelinie

2 Ein wenig Physik aus der Stufe 8

Wirkt eine Kraft F auf einen Stab der Länge l , nimmt seine Länge um Δl zu, wie es in Abbildung 2 angedeutet ist. Im Kleinen ist die Kraft F zur Verlängerung Δl proportional, das ist das Hookesche Gesetz aus dem Physikunterricht der Stufe 8.

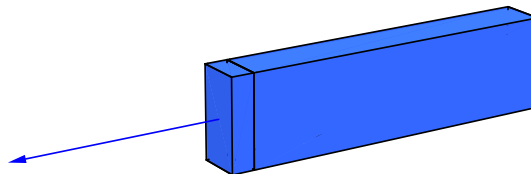


Abbildung 2: Eine Kraft verlängert einen Stab

Lässt man nun die Kraft F auf einen Stab der Länge $2l$ wirken, verlängert sich jedes der beiden Teilstücke um Δl , der Gesamtstab also um $2\Delta l$ (siehe Abbildung 3).

Um nur die Verlängerung Δl zu erreichen, genügt die halbe Kraft, deshalb ist die Kraft proportional zu $1/l$. Dagegen benötigt man bei einem Stab der Länge l , der den doppelten Querschnitt $2A$ des anfangs betrachteten Stabes hat, auch die doppelte Kraft $2F$, um die gleiche Verlängerung Δl zu erreichen, wie Abbildung 4 nahelegt.

Fügen wir die drei Informationen $F \propto \Delta l$, $F \propto \frac{1}{l}$ und $F \propto A$ zusammen, erhalten wir insgesamt

$$F \propto A \frac{\Delta l}{l} ,$$

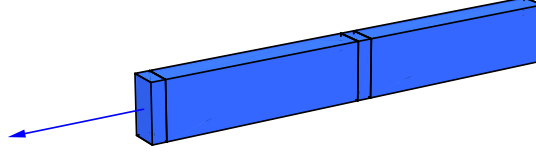


Abbildung 3: Wirkung der Kraft auf einen Stab doppelter Länge und gleichen Querschnitts

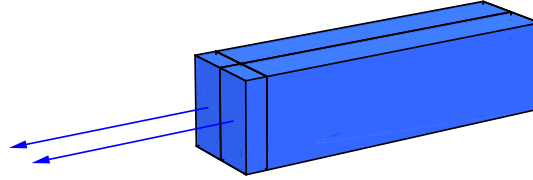


Abbildung 4: Wirkung auf einen Stab doppelten Querschnitts und gleicher Länge

also

$$F = Y A \frac{\Delta l}{l} \quad (1)$$

mit einer Konstanten Y , die in der Mechanik Youngscher Elastizitätsmodul genannt wird.

3 Wirkung des Gewichtes auf einen Punkt der Biegelinie

Es sei $P(x, z)$ ein Punkt der Biegelinie (siehe Abbildung 5). Das Gewicht, das am Endpunkt $E(e, z(e))$ angreift, erzeugt im Punkt P ein Drehmoment M . Der Kraftarm ist die Strecke $\overline{PE}$. Um die wirkende Kraft zu bestimmen, muss man die Gewichtskraft $\vec{G}$ als Summe einer Kraft $\vec{G}_p$ parallel zu $\overline{PE}$ und einer Kraft $\vec{G}_s$ senkrecht $\overline{PE}$ schreiben. Das Drehmoment ist dann

$$M = G_s \cdot |\overline{PE}| \quad .$$

Nun ist der Winkel zwischen $\vec{G}$ und $\vec{G}_s$ genau so groß wie der Winkel zwischen $\overline{PE}$ und der Horizontalen, und der Kosinus dieses Winkels ist

$$\frac{G_s}{G} = \frac{e - x}{|\overline{PE}|} \quad .$$

Es folgt $G_s \cdot |\overline{PE}| = G(e - x)$, also ist das Drehmoment gegeben durch

$$M = G(e - x) \quad . \quad (2)$$

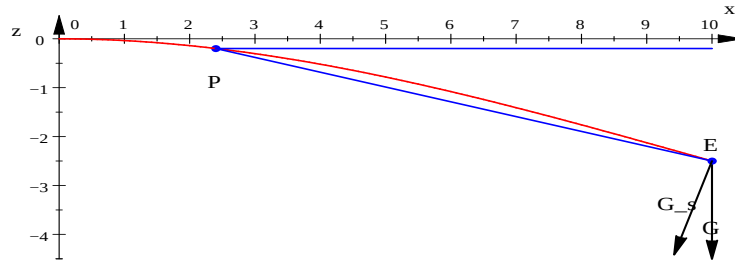


Abbildung 5: Wirkung des Gewichtes auf einen Punkt der Biegelinie

4 Antwort des Brettes

Da das belastete Brett insgesamt in Ruhe ist, muss das Drehmoment M auf P aus Gleichung 2 irgendwie ausgeglichen werden. Um zu verstehen, wie das geschieht, dürfen wir nicht länger von der Dicke des Brettes absehen. Wir stellen uns vor, das Brett bestehe aus dünnen waagerechten Schichten. Wenn es gebogen wird, werden die oberen Schichten gedehnt und die unteren Schichten gestaucht. Dabei entstehen Kräfte entsprechend Gleichung 1. Wir stellen uns vereinfachend vor, die mittlere Schicht behalte ihre Länge; sie hat dann wieder die durch die Biegelinie gegebene Form (siehe Abbildung 6, der Punkt P ist markiert).

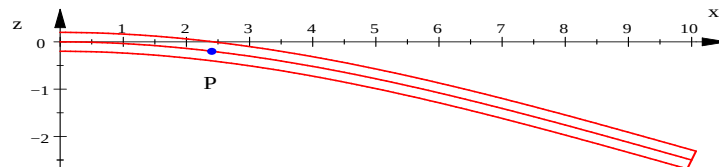


Abbildung 6: Bild des Brettes unter Berücksichtigung der Dicke

Wir ersetzen nun die Biegelinie in der Nähe des Punktes P durch ihren Krümmungskreis im Punkte P ; das ist ein Kreis durch P , dessen Mittelpunkt auf der Normalen¹ in P liegt und dessen Radius R der Kehrwert der Krümmung der Biegelinie im Punkt P ist; er nähert die Kurve in der Nähe von P besonders gut an.

Die beschriebene Situation ist in Abbildung 7 dargestellt. Wir sehen die Schnittlinien der waagerechten Schichten des Brettes mit der Zeichenebene im betrachteten Sektor als Stücke von Kreisen an, die den gleichen Mittelpunkt haben wie der Krümmungskreis – das ist keineswegs die letzte kühne Vereinfachung, die wir vornehmen werden!

Wir versehen die Normale nun mit einer Skala, der Nullpunkt liegt in P . Wenn das Brett die Dicke $2d$ hat, schneiden die waagerechten Schichten des Brettes die Normale in Punkten mit den

¹Die Normale einer Kurve in einem Kurvenpunkt ist die Gerade durch den Kurvenpunkt, die auf der Tangenten in dem Punkt senkrecht steht.

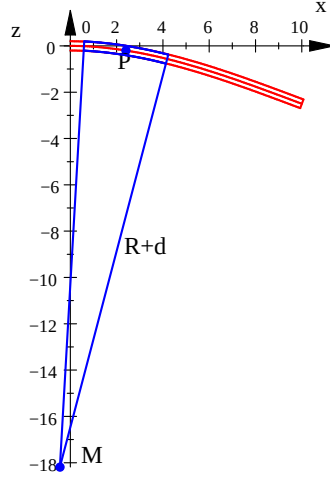


Abbildung 7: Die Biegelinie wird lokal durch ihren Krümmungskreis in P ersetzt.

Werten $y = -d$ bis $y = d$. Die Länge des Stücks des Krümmungskreises, das im gezeichneten Sektor liegt, bezeichnen wir mit l . Dann ist die Länge der Schnittlinie der Schicht in der Höhe y im Sektor gegeben durch

$$l \frac{R+y}{R} = l + l \frac{y}{R} ,$$

gegenüber der Normallänge l hat sie dann die Verlängerung

$$\Delta l = l \frac{y}{R}$$

erfahren. Bei einer Schichtdicke Δy und einer Brettbreite b ergibt sich daraus nach Gleichung 1 die Kraft

$$Y(b\Delta y) \frac{\Delta l}{l} = Y(b\Delta y) \frac{y}{R} ,$$

und sie bewirkt auf P das Drehmoment²

$$Y(b\Delta y) \frac{y}{R} y = \frac{Yb}{R} y^2 \Delta y .$$

Teilen wir das Brett in n Schichten auf, bewirken die Kräfte insgesamt auf P ein Drehmoment, das durch einen Ausdruck der Form

$$\sum_{i=1}^n \frac{Yb}{R} y_i^2 \Delta y$$

gegeben ist. Für $n \rightarrow \infty$ wird daraus, wie üblich, das Integral

$$\int_{-d}^d \frac{Yb}{R} y^2 dy = \frac{Yb}{3R} y^3 \Big|_{y=-d}^{y=d} = \frac{2Ybd^3}{3R} = \frac{YAd^2}{3R} . \quad (3)$$

5 Eine Differentialgleichung für die Biegelinie

Die beiden Drehmomente auf den Punkt $P(x, z)$ der Biegelinie, die in den Gleichungen 3 und 2 angegeben sind, müssen sich aufheben. Es gilt also

$$G(e-x) = -\frac{YAd^2}{3R} . \quad (4)$$

²Wir stellen beruhigt fest, dass die Länge l des betrachteten Ausschnitts der Biegelinie, die ja willkürlich war, im Ergebnis nicht mehr auftaucht.

Wir erinnern uns, dass der Kehrwert des Radius R des Krümmungskreises die Krümmung der Biegelinie im Punkt P ist. Wenn wir die Gleichung der Biegelinie in der Form $z = z(x)$ schreiben, folgt daraus

$$\frac{1}{R} = \frac{z''}{\sqrt{1 + (z')^2}^3} .$$

Setzen wir dies für $1/R$ in Gleichung 4 ein, erhalten wir

$$G(e - x) = -\frac{1}{3}YAd^2 \frac{z''}{\sqrt{1 + (z')^2}^3}$$

und schließlich

$$\frac{z''}{\sqrt{1 + (z')^2}^3} = -\frac{3G}{YAd^2}(e - x) . \quad (5)$$

Dies ist eine Differentialgleichung für die Biegelinie, aber wir haben keine Chance, sie zu lösen, das heißt, eine Funktion $z = z(x)$ zu finden, die die Gleichung erfüllt. Aber da die Biegelinie nur schwach gekrümmt ist, setzen wir mutig näherungsweise

$$\sqrt{1 + (z')^2}^3 \approx 1 \quad (6)$$

und erhalten damit die Differentialgleichung

$$z'' = -\frac{3G}{YAd^2}(e - x) , \quad (7)$$

die wir leicht lösen können. Es ist nämlich nun notwendig

$$z = z(x) = -\frac{3G}{YAd^2}\left(-\frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{2}ex^2 + c_1x + c_2\right) \quad \text{mit festen Zahlen } c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Da $z(0) = z'(0) = 0$ gelten muss, folgt $c_1 = c_2 = 0$; es ist also

$$z = -\frac{3G}{YAd^2}\left(\frac{1}{2}ex^2 - \frac{1}{6}x^3\right) \quad (8)$$

unsere Gleichung der Biegelinie. Dabei war G die Gewichtskraft, Y eine physikalische Konstante, A der Querschnitt und $2d$ die Dicke des Brettes, das im Nullpunkt waagrecht eingespannt war und dessen Endpunkt sich im Punkt $(e, z(e))$ befand. Die Kurve in Abbildung 1 auf Seite 2 ist mit einer Gleichung dieses Typs gezeichnet worden.

6 Kritische Betrachtung der Lösung

Bei der erhaltenen Lösungskurve handelt es sich um eine Kurve dritten Grades, der Vorfaktor von x^3 ist positiv. Sie hat eine doppelte Nullstelle bei $x = 0$, die dritte Nullstelle ist $x = 3e$ und der Wendepunkt liegt bei $x = \frac{3}{2}e$. Für die Biegelinie verwenden wir den Abschnitt der Kurve zwischen $x = 0$ und $x = e$, und dort sieht sie so aus, wie wir es erwarten.

7 Numerische Lösung von Gleichung 5

Die zunächst erhaltene Differentialgleichung, die in Gleichung 5 auf Seite 6 angegeben ist, konnten wir nicht exakt lösen, deshalb haben wir sie rabiart vereinfacht. Ich habe für die Konstanten konkrete Zahlen eingesetzt, die Differentialgleichung in Gleichung 5 dann numerisch gelöst und die Lösungskurve mit der Lösungskurve der entsprechenden Gleichung 7 verglichen. Es zeigte sich, dass sich die Kurven kaum unterschieden, solange die Auslenkung $|z(e)|$ des Brettendes kleiner als $\frac{1}{4}e$ blieb:

$$|z(e)| \lesssim \frac{1}{4}e$$

Abbildung 8 zeigt die analytisch gewonnene Lösungskurve von Gleichung 7 (rote Kurve) und die numerisch gewonnene Lösungskurve der Gleichung 5 (schwarze Kurve). Die numerisch gewonnene Kurve verläuft etwas unterhalb der anderen.

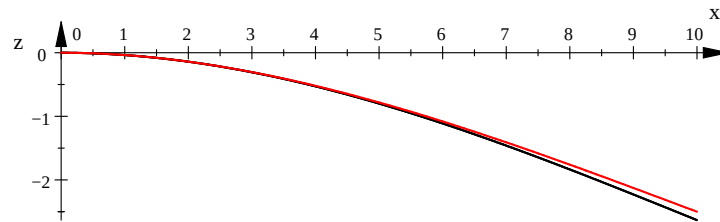


Abbildung 8: Lösungskurven der Gleichungen 5 und 7

8 Anmerkungen

1. Herr Bruns hat die Biegelinie im Rahmen eines ausführlichen Artikels zum Thema Strahlensatz abgehandelt. Der Artikel ist auf der Seite des Gymnasiums Petershagen einzusehen.³
2. Die Rechnungen, die im Rahmen dieser Nacherzählung zu leisten waren, habe ich mit Hilfe von Maple durchgeführt, siehe die Datei biegeleinie.mws in diesem Verzeichnis.

³Die Adresse der Schulseite ist: „<http://www.schulen-petershagen.de/gympet/www/>“. Man findet den Artikel dann so: „Unsere Arbeit“ → „Aus dem Unterricht“ → „Mathematik“.