

Einfache Probleme der Variationsrechnung

Henrik Schumacher

29. März 2006

Inhaltsverzeichnis

0	Einführung	1
1	Wir lernen am historischen Beispiel:	
	Die Brachistochrone	2
1.1	Zum Warmwerden: Extremalstellen im $\mathbb{R}^n$	2
1.2	Die Problemstellung	2
1.3	Abstraktion des Problems	4
1.4	Lösung: Die Euler-Lagrange-Gleichung	4
1.5	Rückkehr zur Brachistochrone	6
2	Weitere Beispiele	7
2.1	Das Fermatsche Prinzip	7
2.2	Geodäten	7
2.3	Euler-Lagrange-Gleichungen in der Mechanik	8

0 Einführung

Bereits im Jahre 1696 löste Johann Bernoulli das Brachistochronenproblem, fand also die Kurve kürzester Durchfallzeit bei konstanter Erdbeschleunigung und legte gleichzeitig den Grundstein für die Disziplin der Variationsrechnung. Im Wesentlichen geht es in der Variationsrechnung darum, Extremalstellen von Funktionen zu finden, deren Argumente auch Funktionen sind. Wir nennen sowas einfach *Funktionenfunktion* oder kürzer *Funktional*. Will man in diesem Problemkreis einen Fuß an die Erde bekommen, tut man - wie so oft - gut daran, ein konkretes Problem in Angriff zu nehmen und dann im Prozeß der mathematischen Formulierung die wesentlichen Aspekte zu abstrahieren, um die Lösungsmethoden, die man entwickelt, auch auf verwandte Probleme anwenden zu können. Gleichzeitig wird der Weg zu einer Lösung durch das Weglassen des Unwesentlichen (meistens sind das die physikalischen Gegebenheiten) gerade erst ersichtlich. Diesem Vorgang ist der Abschnitt 1 gewidmet, in dem wir das Problem der Brachistochrone angehen werden. Es folgen im Abschnitt 2 weitere Beispiele aus Optik, Geometrie und Mechanik.

Umso schöner wird der Einstieg dadurch, daß sich ein ganz wichtiges Resultat, die Euler-Lagrange-Gleichungen, mit denen sich schon viele spannende Beispiele behandeln lassen, fast ausschließlich durch Rückgriff auf das Schulwissen der Oberstufe herleiten läßt. Gleichzeitig kann man dabei erahnen, daß das Potential der Differentialrechnung bei der Behandlung von endlichdimensionalen Vektorräumen (wie z.B. dem $\mathbb{R}^3$) noch keineswegs ausgeschöpft ist, sondern daß sie sich fast genauso auch in gewissen Funktionenräumen anwenden läßt. Um die Analogie zwischen den Problemen „Finden von Extremalstellen einer Funktion auf dem $\mathbb{R}^n$ “ und „Finden einer Extremalstelle eines Funktionals“ zu erkennen, brauchen wir zuerst ein paar Vorbereitungen; hierzu dient 1.1.

1 Wir lernen am historischen Beispiel: Die Brachistochrone

1.1 Zum Warmwerden: Extremalstellen im $\mathbb{R}^n$

Gegeben sei eine Funktion $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$. Zu bestimmen sind die Minimalstellen. Wie geht man hier vor? Angenommen $\vec{a} \in \mathbb{R}^n$ wäre so eine Minimalstelle. Läuft man vom Punkt $\vec{a}$ aus mit dem Parameter $t \in \mathbb{R}$ in Richtung $\vec{u}$, so erhält man eine Funktion $g(t) = f(\vec{a} + t \cdot \vec{u})$, die an der Stelle $t = 0$ ein Minimum besitzen muß. Notwendig gilt dann für *alle* $\vec{u} \in \mathbb{R}^n$:

$$\frac{\partial}{\partial \vec{u}} f(\vec{a}) := \frac{dg}{dt}(0) = \left. \frac{d}{dt} f(\vec{a} + t\vec{u}) \right|_{t=0} = 0.$$

Man nennt $\frac{\partial}{\partial \vec{u}} f(\vec{a})$ die *Richtungsableitung* von f an der Stelle $\vec{a}$ in Richtung $\vec{u}$.

Derjenige, der sich schon mit der Differentiation von Funktionen mehrerer Variabler auskennt, wird sich auch daran erinnern, daß man aus dem *Gradienten* $\vec{\text{grad}} f(\vec{a}) := (\partial_1 f(\vec{a}), \dots, \partial_n f(\vec{a}))$ oder aus der *Jacobimatrix* $Df(\vec{a}) = (\partial_1 f(\vec{a}), \dots, \partial_n f(\vec{a}))$ die Richtungsableitung wie folgt erhält:

$$\frac{\partial}{\partial \vec{u}} f(\vec{a}) = \vec{\text{grad}} f * \vec{u} = Df(\vec{a}) \bullet \vec{u},$$

wobei $*$ das Standardskalarprodukt und $\bullet$ die Matrizenmultiplikation bedeutet.

1.2 Die Problemstellung

Seien die Punkte $A = (x_1, y_1)$ und $B = (x_2, y_2)$ in der xy -Ebene gegeben und A liege höher als B , d.h. $y_1 > y_2$. Wir stellen uns jetzt vor, wir hätten Draht und eine Perle mit einem Loch, die reibungsfrei auf dem Draht gleiten kann. Dann kann man ein Stück von dem Draht nehmen und ihn irgendwie verbiegen (biegen, nicht knicken!), so daß die Enden im Punkt A und im Punkt B liegen.

Der Draht formt dann eine *glatte* Kurve von A nach B . Steckt man dann die Perle im Punkt A darauf, läßt sie dann los und hat man den Draht richtig verbogen, so gleitet die Perle unter dem Einfluß der Erdanziehung in den tiefer gelegenen Punkt B . Wir wollen jetzt den Draht so formen, daß die Perle möglichst schnell von A nach B kommt! Die Kurve, die der Draht dann beschreibt oder die die Perle dann durchläuft, heißt Brachistochrone (gr. *brachistos* kürzeste, *chronos* Zeit).

Beschreiben können wir diese Kurve durch die Koordinaten $x(t)$, $y(t)$ der Perle zum Zeitpunkt $t \in [0, T]$. Dabei ist T der Zeitpunkt, zu dem die Perle im Punkt B angelangt ist. Der Einfachheit halber legen wir den Anfangspunkt der Kurve in den Ursprung: $x(0) = 0$, $y(0) = 0$.

Die Geschwindigkeit $v(t)$ zum Zeitpunkt t ergibt sich aus der durchfallenen Höhe, da die potentielle Energie E_{pot} sich in kinetische Energie E_{kin} umwandelt. Da sich die Perle zu Anfang in Ruhe befinden soll, gilt $v(0) = 0$. Wir erhalten:

$$mg(-y(t)) = E_{\text{pot}}(0) - E_{\text{pot}}(t) = E_{\text{kin}}(t) - E_{\text{kin}}(0) = \frac{1}{2}mv^2(t),$$

also $v(t) = \sqrt{-2gy(t)}$. Man beachte, daß stets $y(t) \leq 0$ gelten muß, da die Perle mangels Energie nicht noch höher kommen kann.

Nun überlegt man sich: Bei der Brachistochronen ist stets $\dot{x}(t) \geq 0$, das heißt, die Perle wird nie entgegen der Richtung der positiven x -Achse laufen. Um dies einzusehen betrachte man die untenstehenden Bilder: Dort sieht man, wie man zu einer Kurve mit $\dot{x}(t) < 0$ stets eine etwas „bessere“ Kurve mit $\dot{x}(t) \geq 0$ finden kann, denn auf gleicher Höhe ist jeweils die Geschwindigkeit gleich, aber das gestrichelte Kurvenstück ist gleichzeitig kürzer.

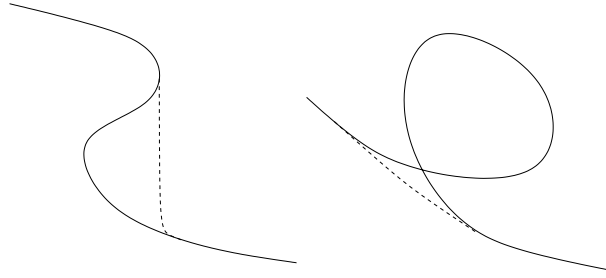


Abbildung 1: Zwei Kurven, die nicht die Brachistochrone sein können (durchgezogen), weil man Kurven mit kürzerer Durchlaufzeit (gestrichelt) finden kann, die zudem $\dot{x}(t) \geq 0$ erfüllen.

Mit einem ganz ähnlichen Argument sieht man, daß $\dot{x}(t) = 0$ nur für einzelne isoliert liegende Zeitpunkte t gelten kann. Das bedeutet, daß $x(t)$ streng monoton mit x wächst, es gibt also eine Umkehrfunktion $t(x)$. Wir können daher die für die Brachistochrone noch in Frage kommenden Kurven auch mit x parametrisieren und erhalten dann die Kurve

$$x \mapsto \begin{pmatrix} x(t(x)) \\ y(t(x)) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y(x) \end{pmatrix}$$

Es reicht also, Funktionen der Form $y : [x_1, x_2] \rightarrow]-\infty, 0]$ zu betrachten mit $y(x_2) = y_2$. Jetzt wollen wir mal die Durchlaufzeit $T[y]$ ausrechnen, denn um die zu minimieren, müssen wir ja erstmal wissen, wie die aussieht. Bei der Parametrisierung nach der Zeit t haben wir sie eben schon benutzt, ohne sie zu kennen; es war $x(T[y]) = x_2$ oder auch $t(x_2) = T[y]$. Wenn wir die Ableitung $t'(x)$ kennen würden, könnten wir mit dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung $T[y]$ wie folgt ausrechnen:

$$T[y] := t(x_2) = \int_0^{x_2} t'(x) dx$$

Es gilt $(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 = (\Delta s)^2 \approx v^2 \cdot (\Delta t)^2$ und damit $1 + \left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2 \approx v^2 \cdot \left(\frac{\Delta t}{\Delta x}\right)^2$ und für $\Delta x \rightarrow 0$ erhält man wegen $v(x) \geq 0$ und $y(x) \leq 0$:

$$t'(x) = \frac{1}{v(x)} \sqrt{1 + y'(x)^2} = \sqrt{\frac{1 + y'(x)^2}{-2gy(x)}}.$$

Wir erhalten also:

$$T[y] = \int_0^{x_2} t'(x) dx = \int_0^{x_2} \sqrt{\frac{1 + y'(x)^2}{-2gy(x)}} dx.$$

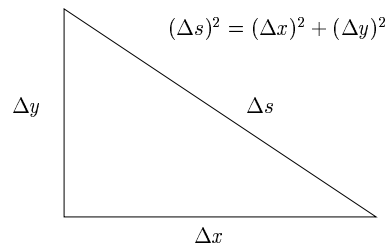


Abbildung 2: Beweisskizze

Bevor wir die Durchlaufzeit minimieren, führen wir einige Betrachtungen durch, in denen das Wesentliche aus der Situation abstrahiert werden soll.

1.3 Abstraktion des Problems

Jeder Kurve f wird also ihre Durchlaufzeit T zugeordnet, wir haben also die *Funktionenfunktion* oder das *Funktional* $T[f]$, dessen Minimalstellen wir finden wollen (wir schreiben das Argument eines Funktionals in eckige Klammern, um es von einer “gewöhnlichen” Funktion zu unterscheiden).

Unser Funktional T ist von der Form

$$T[f] = \int_{x_1}^{x_2} F(f(x), f'(x), x) dx$$

mit einer Funktion $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$, das ist eine Funktion mit drei reellen Argumenten. (Für Profis: F soll zweimal stetig differenzierbar im Sinne von totaler Differenzierbarkeit sein). Dies sieht komplizierter aus, als es ist, in unserem Beispiel hat F die Form:

$$F(a, b, c) = \sqrt{\frac{1 + b^2}{-2ga}} \quad (1)$$

Wir vergessen jetzt einfach alles Physikalische und merken uns nur, daß T ein Funktional ist, das wie oben durch einen Integralausdruck gegeben ist.

Funktionen mit gemeinsamen Definitionsbereich kann man addieren und mit reellen Zahlen multiplizieren und es gelten die gewöhnlichen Rechenregeln (Distributivgesetz, Assoziativgesetz... etc.). Sie bilden einen sogenannten Vektorraum (nur für diejenigen, die sowas schon mal gehört haben). Auch aus der Menge

$$\mathcal{F}_0 = \{g : [x_1, x_2] \rightarrow \mathbb{R} \mid g(x_1) = g(x_2) = 0\}$$

führen Addition und Skalarmultiplikation nicht heraus.

Wenn jetzt f die Kurve ist, die T minimiert, können wir ein $g \in \mathcal{F}_0$ als “Richtung” nehmen und mit einem Parameter $h \in \mathbb{R}$ daran “wackeln”, $f + h \cdot g$ ist auch eine Kurve mit den Endpunkten in A und B . Nun gucken wir, was das T so macht. Wir erhalten eine Funktion $G(h) = T[f + h \cdot g]$. Da f Minimalstelle von T ist, gilt $G(h) - G(0) = T[f + h \cdot g] - T[f] \geq 0$ für alle $h \in \mathbb{R}$. Daher erhält man für die “Richtungsableitung” von T an der Stelle f in die “Richtung” g :

$$\frac{\delta}{\delta g} T[f] := \lim_{h \rightarrow 0} \frac{T[f + h \cdot g] - T[f]}{h} = \frac{dG}{dh}(0) = 0.$$

Das heißt, der Ansatz ist hier genau der gleiche wie für gewöhnliche Funktionen! Schauen wir mal, wie es weitergeht!

1.4 Lösung: Die Euler-Lagrange-Gleichung

Jetzt wird es etwas technisch. Wenn Du nicht alles verstehst, ist das nicht schlimm. Es zeigt Dir aber, was es sich noch zu lernen lohnt!

Wir versuchen jetzt aus der Bedingung $\frac{dG}{dh}(0) = 0$ irgendetwas zu machen. Wir leiten erstmal G nach h ab, das g halten wir zunächst fest:

$$\begin{aligned} G(h) = T[f + h \cdot g] &= \int_{x_1}^{x_2} F(f(x) + h \cdot g(x), f'(x) + h \cdot g'(x), x) dx \\ \frac{d}{dh} G(h) = \frac{d}{dh} T[f + h \cdot g] &= \frac{d}{dh} \int_{x_1}^{x_2} F(f(x) + h \cdot g(x), f'(x) + h \cdot g'(x), x) dx \\ &\stackrel{(*)^1}{=} \int_{x_1}^{x_2} \frac{d}{dh} F(f(x) + h \cdot g(x), f'(x) + h \cdot g'(x), x) dx \\ &\stackrel{(*)^2}{=} \int_{x_1}^{x_2} \frac{d}{dh} F(f + h \cdot g, f' + h \cdot g', x) dx \end{aligned}$$

Daß $(*)^1$ gilt, ist keineswegs selbstverständlich, aber bei den gegebenen Bedingungen ist das erfüllt. Wir lassen jetzt der Kürze wegen oft wie oben in $(*)^2$ die Argumente von f und g weg. Wir müssen nun also den Integranden nach h differenzieren und benutzen dabei eine Variante der Kettenregel:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dh} F(f + h \cdot g, f' + h \cdot g', x) = & \partial_1 F(f + h \cdot g, f' + h \cdot g', x) \cdot g(x) \\ & + \partial_2 F(f + h \cdot g, f' + h \cdot g', x) \cdot g'(x) \\ & + \partial_3 F(f + h \cdot g, f' + h \cdot g', x) \cdot 0 \end{aligned}$$

Dabei bedeutet ∂_i die partielle Ableitung nach dem i -ten Argument von F . Da x als Integrationsvariable nicht von h abhängt, ist der letzte Summand gleich 0. Alles wird viel übersichtlicher, wenn wir das bei $h = 0$ auswerten:

$$\frac{dG}{dh}(0) = \int_{x_1}^{x_2} (\partial_1 F(f, f', x) \cdot g(x) + \partial_2 F(f, f', x) \cdot g'(x)) dx$$

Durch partielle Integration erhält man:

$$\int_{x_1}^{x_2} (\partial_2 F(f, f', x) \cdot g'(x)) dx = \partial_2 F(f, f', x) \cdot g(x) \Big|_{x_1}^{x_2} - \int_{x_1}^{x_2} \left(\frac{d}{dx} \partial_2 F(f, f', x) \cdot g(x) \right) dx$$

Ich erinnere daran, daß $g(x_1) = g(x_2) = 0$ gilt, weshalb der erste Summand wegfällt! Wir erhalten schließlich als notwendige Bedingung für beliebiges $g \in \mathcal{F}_0$:

$$\int_{x_1}^{x_2} \left(\partial_1 F(f, f', x) - \frac{d}{dx} \partial_2 F(f, f', x) \right) \cdot g(x) dx = 0$$

Puh, beinahe geschafft! Ich behaupte nun: Als notwendige Bedingung dafür, daß f Extremalstelle von T ist, muß gelten: $\partial_1 F(f, f', x) - \frac{d}{dx} \partial_2 F(f, f', x) = 0$ für alle $x \in [x_1, x_2]$. Gäbe es nämlich ein $x_0 \in [x_1, x_2]$ sodaß $\partial_1 F(f, f', x_0) - \frac{d}{dx} \partial_2 F(f, f', x_0) \neq 0$, z.B. > 0 , so gibt es noch ein kleines Intervall $]\alpha, \beta[$ um x_0 , wo dies ebenfalls noch gilt (vgl. Abb.). (Für die Kenner: Der Ausdruck ist stetig in x). Jetzt kann man ein $g \in \mathcal{F}_0$ finden, das positiv ist auf $[\alpha, \beta]$ und $= 0$ außerhalb von $[\alpha, \beta]$. Dann ist aber obiges Integral echt größer als null, was nicht sein kann.

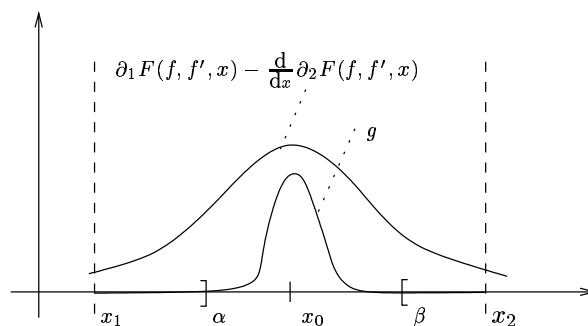


Abbildung 3: Beweisskizze

Wir haben jetzt als notwendige Bedingung an f die *Euler-Lagrange-Gleichung*:

$$\partial_1 F(f, f', x) - \frac{d}{dx} \partial_2 F(f, f', x) = 0 \text{ für alle } x \in [x_1, x_2].$$

Wir wollen gleich mal sehen, ob die was nützt!

1.5 Rückkehr zur Brachistochrone

Die Rechnung war sehr mühsam, und man sieht zuerst gar nicht, was man da nun eigentlich erreicht hat. Am besten, man rechnet erstmal nach, was die Euler-Lagrange-Gleichung bringt!

Aufgabe

Berechne die Euler-Lagrange-Gleichung für das Brachistochronenproblem! (Die Funktion F findet man auf Seite 4 in Gleichung (1)). Nur Mut, das ist zu schaffen!

Man erhält (mit $y = y(x) = f(x)$):

$$\partial_1 F(y, y', x) = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{1 + y'^2}{-2gy^3}}$$

und

$$\frac{d}{dx} \partial_2 F(y, y', x) = \frac{1}{2} \frac{-2y''(1 + y'^2)y + 2yy'^2y'' + y'^2(1 + y'^2)}{\sqrt{-2gy^3(1 + y'^2)^3}}$$

Wir erhalten aus der Euler-Lagrange-Gleichung:

$$1 + y'^2 + 2y''y = 0,$$

da für das Verschwinden eines Bruches allein der Zähler verantwortlich ist. Wir erkennen daran, daß wegen $y \leq 0$ (vgl. 1.2) gelten muß $y'' \geq 0$, das heißt, die gesuchte Kurve ist linksgekrümmt! Es ist ferner $\frac{d}{dx}y(1 + y'^2) = y'(1 + y'^2 + 2y''y) = 0$. Also gibt es eine Konstante C , so daß gilt: $y(1 + y'^2) = C$ und $C < y < 0$, ferner:

$$\frac{dy}{dx} = \pm \sqrt{\frac{C - y}{y}}, \text{ und } \frac{dx}{dy} = \pm \sqrt{\frac{y}{C - y}}.$$

Wir rechnen mit dem Minus weiter, da sonst $y'' < 0$ werden kann, wegen $y''(x) = \mp \frac{C}{2y^2(x)}$. Jetzt kann man einen neuen Parameter λ einführen und schreiben:

$$y = C \sin^2(\lambda), \text{ und } \frac{dy}{d\lambda} = 2C \sin \lambda \cos \lambda.$$

Wir schreiben

$$\begin{aligned} x - 0 &= \int_0^y \frac{dx}{dy} d\bar{y} = \int_0^y -\sqrt{\frac{\bar{y}}{C - \bar{y}}} d\bar{y} \stackrel{\text{Substitution}}{=} \int_0^\lambda -\sqrt{\frac{C \sin^2 \bar{\lambda}}{C - C \sin^2 \bar{\lambda}}} \frac{d\bar{y}}{d\bar{\lambda}} d\bar{\lambda} \\ &= \int_0^\lambda -\frac{\sin \bar{\lambda}}{\cos \bar{\lambda}} 2C \sin \bar{\lambda} \cos \bar{\lambda} d\bar{\lambda} \stackrel{\text{nachrechnen!}}{=} -C(\lambda - \sin \lambda \cos \lambda). \end{aligned}$$

Mit $\sin(2\lambda) = 2 \sin \lambda \cos \lambda$ und $\sin^2 \lambda = \frac{1}{2}(1 - \cos(2\lambda))$ erhalten wir:

$$\begin{pmatrix} x(\lambda) \\ y(\lambda) \end{pmatrix} = \frac{C}{2} \begin{pmatrix} \sin(2\lambda) - 2\lambda \\ 1 - \cos(2\lambda) \end{pmatrix} = \frac{C}{2} \begin{pmatrix} -2\lambda \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{C}{2} \begin{pmatrix} \sin(2\lambda) \\ -\cos(2\lambda) \end{pmatrix}$$

Setzen wir noch $R = -\frac{C}{2}$ und $\varphi := 2\lambda$, dann erkennen wir die Parametrisierung der *Zykloide*!

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = R \begin{pmatrix} \varphi \\ -1 \end{pmatrix} + R \begin{pmatrix} \sin(-\varphi) \\ \cos(-\varphi) \end{pmatrix}$$

Aufgabe

Schau Dir in *Zykloide.mws* an, wie die Brachistochrone aussieht!

2 Weitere Beispiele

2.1 Das Fermatsche Prinzip

Das Fermatsche Prinzip besagt, daß ein Lichtstrahl, der von einem Punkt A zu einem Punkt B läuft, so verläuft, daß seine Laufzeit minimiert wird. Dies wird erst interessant, wenn das Medium, in dem sich das Licht fortbewegt, nicht homogen ist, also die Lichtgeschwindigkeit im Medium variiert.

Aufgabe

Oberhalb der x -Achse in der Ebene sei Luft, unterhalb der x -Achse sei Glas (oder irgendein anderes lichtdurchlässiges Medium). Die Lichtgeschwindigkeit in Luft sei c_1 , die in Glas sei c_2 und es sei $c_1 > c_2$. Der Punkt A liegt oberhalb der x -Achse, in ihm befinde sich eine Lichtquelle. Bestimme die Stelle auf der x -Achse, wo ein Lichtstrahl auf dem Weg von A zum Punkt B unterhalb der x -Achse dieselbe schneidet.

Aufgabe

Wir befinden uns wieder in der xy -Ebene, nur nehme die Lichtgeschwindigkeit mit der y -Koordinate exponentiell ab: $c(y) = e^{-y}$. Wir fragen uns wie Lichtstrahlen in diesem Medium verlaufen. Die Durchlaufzeit einer Kurve $f(x)$ beträgt:

$$T[f] = \int_{x_1}^{x_2} \frac{\sqrt{1 + f'(x)^2}}{c(f(x))} dx$$

Benutze Maple, um die Euler-Lagrange-Gleichungen zu bestimmen, sie zu lösen und stelle sie grafisch dar. Verwende dabei die Datei `Fermat.mws`!

2.2 Geodäten

Geodäten sind Linien mit der folgenden Eigenschaft: Nimmt man zwei Punkte A und B auf einer Geodäten, so verläuft der kürzeste Weg von A nach B auf der Geodäten.

Wir alle fühlen uns in der euklidischen Geometrie zu Hause. Hier beträgt die Länge einer Kurve $f(x)$ in der Ebene:

$$L[f] = \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1 + f'^2(x)} dx$$

Aufgabe

Finde mit Hilfe der Euler-Lagrange-Gleichung heraus, daß die Geodäten in der euklidischen Geometrie die Geraden in der Ebene sind.

Es gibt aber auch andere, sogenannte nichteuklidische Geometrien, wie zum Beispiel die *hyperbolische Geometrie*. Der Raum, in dem wir uns dann bewegen ist die obere Halbebene ($y > 0$). Die Länge einer Kurve wird dann gegeben durch

$$L[f] = \int_{x_1}^{x_2} \frac{\sqrt{1 + f'^2(x)}}{y} dx$$

Aufgabe

Benutze `HyperGeo.mws` und Maple, um die Euler-Lagrange-Gleichung aufzustellen und zu lösen! Lasse Dir das Ergebnis von Maple plotten! Wie sehen die Geodäten aus?

2.3 Euler-Lagrange-Gleichungen in der Mechanik

Nun aber zu der vielleicht wichtigsten (oder zumindest meistbenutzten) Anwendung der Euler-Lagrange-Gleichungen. Ein mechanisches System läßt sich durch die reellwertigen Funktionen in der Zeit t :

$$(q_1(t), \dots, q_N(t)) = \vec{q}(t)$$

vollständig beschreiben. Zum Beispiel kann man ein Teilchen durch seine drei Koordinaten erfassen, oder man kann die Lage eines Doppelpendels (in der Ebene) durch Angabe von zwei Winkeln angeben. Das System besitzt einmal Lageenergie $E_{\text{pot}}(q_1, \dots, q_N, t)$ aber auch kinetische Energie $E_{\text{kin}}(\dot{q}_1, \dots, \dot{q}_N, t)$. Das Hamiltonprinzip besagt nun, daß ein mechanisches System genau die Bahn durchläuft, die folgendes Funktional minimiert:

$$S[\vec{q}] := \int_{t_1}^{t_2} L(\vec{q}(t), \dot{\vec{q}}(t), t) dt.$$

Dabei ist $L(\vec{q}(t), \dot{\vec{q}}(t), t) = E_{\text{kin}}(\dot{q}_1, \dots, \dot{q}_N, t) - E_{\text{pot}}(q_1, \dots, q_N, t)$ und $S[\vec{q}]$ wird *Wirkung* der Kurve q genannt. Man bekommt dann automatisch N Differentialgleichung durch die Euler-Lagrange-Gleichungen; für jedes q_i jeweils eine:

$$\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \quad \text{für } i = 1, \dots, N.$$

Man darf sich hier nicht verwirren lassen; der Ausdruck $\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}$ bedeutet die partielle Ableitung nach derjenigen Komponente des Argumentes von L , in dem $\dot{q}_i$ steht; also in der bisherigen Schreibweise $\partial_{N+i} L$. Ebenso bedeutet $\frac{\partial L}{\partial q_i}$ in alter Schreibweise $\partial_i L$. Die neue Schreibweise ist aber kürzer und irgendwie intuitiver. Die Differentialgleichungen bekommt man also fast geschenkt. Sie sehen aber meistens garstig aus und lassen sich nur schwer lösen. In einfachen Fällen kommt man aber weiter. Zur Veranschaulichung eine Übung:

Aufgabe

Betrachte einen Körper der Masse m , der an einer Metallfeder mit Federkonstante k hängt. Beschreibe die Lage des Körpers durch die Entfernung x aus der Ruhelage. Drücke kinetische und potentielle Energie durch $x(t)$ und $\dot{x}(t)$ aus und stelle die Euler-Lagrange-Gleichung auf. Kennst Du diese Differentialgleichung? Kannst Du sie lösen? Die Datei `Hamilton.mws` wird dabei hilfreich sein.